

Elektrodynamik

Theoretische Physik B

WS 2010/2011

Prof. Dr. Wolf Gero Schmidt

Universität Paderborn, Lehrstuhl für Theoretische Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Die Maxwellgleichungen	4
1.1	Ladungen und Ströme	4
1.2	Differentielle Maxwellgleichungen	6
1.3	Kramers-Kronig-Beziehung	11
1.4	Integrale Maxwellgleichungen	14
1.5	Mikroskopische und Makroskopische Elektrodynamik	15
2	Elektrostatik	21
2.1	Elektrisches Feld im Vakuum	21
2.2	Skalares Potential	29
2.3	Energie des elektrischen Feldes	31
2.4	Multipolentwicklung	35
2.5	Energien und Kräfte bei Anwesenheit von Medien	43
2.6	Übergangsbedingungen an Grenzflächen	46
2.7	Clausius-Mossotti-Beziehung	51
2.8	Das Randwertproblem	53
2.8.1	Die Greenschen Sätze	53
2.8.2	Eindeutigkeit der Lösung	54
2.8.3	Schein- und Influenzladungen	58
2.8.4	Methode der Greenschen Funktion	62
2.8.5	Kapazitätskoeffizienten	65
3	Magnetostatik	72
3.1	Vektorpotential	72
3.2	Magnetische Multipolentwicklung	79
3.3	Magnetische Kraftwirkungen	83
3.4	Magnetische Feldenergie	85

3.5	Grenzbedingungen	87
3.6	Beispiele	88
4	Quasistationäre Felder	96
4.1	Faradaysches Induktionsgesetz	97
4.2	Kirchhoffsche Regeln	102
5	Volles System der Maxwellgleichungen	107
5.1	Energiebilanz	107
5.2	Eichtransformationen	111
5.3	Freie elektromagnetische Wellen	116
5.4	Transparente lineare Medien	125
5.5	Erzeugung elektromagnetischer Wellen	128
5.5.1	Multipolentwicklung	133
5.5.2	Elektrische Dipolstrahlung	135
6	Kovariante Formulierung der Elektrodynamik	139
6.1	Lorentz-Transformation	139
6.2	Pseudoeuklidischer Raum	141
6.3	Elektromagnetische Felder	146
7	Anhang: Hamilton-Prinzip	153

1 Die Maxwellgleichungen

1.1 Ladungen und Ströme

Elektrische Ladungen sind an Materie gebunden.

Ladungseinheit: Coulomb (C)

$$1C = 1As$$

Die Ladung ist eine skalare und extensive Größe.

Q_1 und Q_2 seien Ladungen in disjunkten Raumbereichen. Die Gesamtladung beträgt somit:

$$Q = Q_1 + Q_2$$

Für $Q = 0$ gilt nicht $Q_1 = Q_2 = 0$, da es sowohl negative, als auch positive Ladungen gibt.

Freie Ladungen sind immer Vielfache einer Elementarladung $e = 1,602 \cdot 10^{-19}C$.

Oft ist es sinnvoll mit der Ladungsdichte zu arbeiten.

$$\rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V}$$

ΔQ ist hierbei die Ladung in ΔV .

Offensichtlich gilt:

$$Q(t) = \int d^3\vec{r} \rho(\vec{r}, t)$$

Für die Beschreibung von Punktladungen gilt:

$$\rho(\vec{r}) = q \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

Analog gilt für mehrere Punktladungen

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{\alpha=1}^N q_{\alpha} \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha})$$

Falls die Punktladungen beweglich auf der Bahnkurve $\vec{r}_\alpha(t)$ sind gilt:

$$\rho(\vec{r}, t) = \sum_{\alpha=1}^N q_\alpha \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_\alpha(t))$$

Bei einer Ladungsänderung in einfach zusammenhängendem Raumbereich V ergibt sich:

$$\Delta Q = \Delta Q^{(1)} + \Delta Q^{(2)}$$

Dabei ist $\Delta Q^{(1)}$ die im Raumbereich erzeugte bzw. vernichtete Ladung und $\Delta Q^{(2)}$ die durch die Oberfläche zu-/abgeflossene Ladung.

Die pro Zeiteinheit durch die Oberfläche (V) fließende Ladung gibt Anlaß zum Ladungsstrom.

$$I = - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q^{(2)}}{\Delta t}$$

Für $I < 0$ fließt der Strom nach innen und für $I > 0$ fließt der Strom nach außen.

Mit Hilfe der Erzeugungs-/Vernichtungsrate $\Lambda \equiv \dot{Q}^{(1)}$ im Volumen V gilt folgende Bilanzgleichung:

$$\dot{Q} + I = \Lambda$$

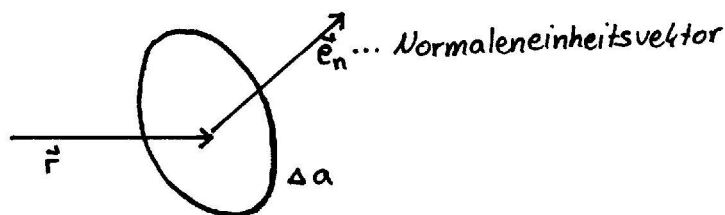
Die Erfahrung besagt, daß es keine Quellen oder Senken für elektrische Ladungen gibt.

Daraus folgt der Erhaltungssatz für die elektrische Ladung.

$$\dot{Q} + I = 0$$

Für die differentielle Betrachtung definieren wir die Stromdichte senkrecht zum Flächenelement Δa .

$$j_n = j_\perp = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta a}$$



$$I(t) = \int_a da \, j_{\perp}(\vec{r}, t)$$

mit

$$j_{\perp} = \vec{e}_n \cdot \vec{j}(\vec{r}, t)$$

wobei $\vec{j}(\vec{r}, t)$ das Vektorfeld der Strömung bzw. das Stromdichtefeld ist.

Mit Hilfe von

$$da \, \vec{e}_n = d\vec{a}$$

folgt somit

$$I(t) = \int_a d\vec{a} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t)$$

Für das Stromdichtefeld bewegter Punktladungen gilt:

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \sum_{\alpha=1}^N q_{\alpha} \cdot \dot{\vec{r}}_{\alpha}(t) \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}(t))$$

Damit können wir den Erhaltungssatz der Ladungen formulieren als

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_V d^3\vec{r} \rho(\vec{r}, t)}_{V=\text{const: } \int d^3\vec{r} \dot{\rho}(\vec{r}, t)} + \underbrace{\int_{(V)} d\vec{a} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t)}_{\int_V d^3\vec{r} \, \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t)} = 0$$

Damit ergibt sich die lokale (differentialle) Form der Ladungserhaltung, die sogenannte "Kontinuitätsgleichung":

$$\dot{\rho} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

1.2 Differentielle Maxwellgleichungen

Im Vakuum kann der elektromagnetische Zustand des Raumes durch zwei Vektorfelder beschrieben werden:

- elektrisches Feld $\vec{E}(\vec{r}, t)$

- magnetisches Induktionsfeld $\vec{B}(\vec{r}, t)$

Im Inertialsystem sind diese Felder mit Ladungsdichten und Stromdichten verknüpft durch folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & \text{homogene MWG im Vakuum} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} &= 0 & \text{homogene MWG im Vakuum} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \rho & \text{inhomogene MWG im Vakuum} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \cdot \dot{\vec{E}} &= \mu_0 \cdot \vec{j} & \text{inhomogene MWG im Vakuum}\end{aligned}$$

mit $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$, $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$, $\epsilon_0 \cdot \mu_0 = \frac{1}{c^2}$ mit $c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$.

Bemerkung:

Die Maxwellgleichungen sind linear.

$\Rightarrow$ Felder können sich überlagern ohne sich gegenseitig zu beeinflussen.

Die Maxwellgleichungen beschreiben den Einfluß von Ladungen und Strömen auf Felder, welche ihrerseits auf geladene Teilchen wirken.

Ein System von N Punktladungen q_α erfährt die Lorentz-Kraft:

$$\vec{F} = \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^N q_\alpha \vec{E}(\vec{r}_\alpha(t), t) + q_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha(t) \times \vec{B}(\vec{r}_\alpha(t), t)$$

Die zugehörige Kraftdichte ergibt sich aus:

$$\vec{f}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{j}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t)$$

Diese erfüllt

$$\vec{F} = \int_V d^3\vec{r} \vec{f}(\vec{r}, t)$$

Die Maxwellgleichungen im Vakuum beschreiben elektromagnetische Eigenschaften der Materie korrekt, aber sind für makroskopische Systeme oft unpraktisch: typischerweise sind 10^{23} Einzelladungen zu berücksichtigen.

Beispiel:

In der Optik müssten alle Blenden, Linsen und Spiegel auf atomistischem Niveau beschrieben werden.

⇒ Mittelung über atomistische Strukturen

⇒ makroskopische Maxwellgleichungen, die nur noch makroskopisch relevante Ladungen enthalten

Die mikroskopischen Informationen sind jetzt in
Polarisation $\vec{P}(\vec{r}, t)$ und
Magnetisierung $\vec{M}(\vec{r}, t)$
enthalten.

Wir definieren das Verschiebungsfeld

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{P}(\vec{r}, t)$$

und die magnetische Feldstärke

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \cdot \left(\vec{B}(\vec{r}, t) - \vec{M}(\vec{r}, t) \right)$$

Dafür gelten jetzt die makroskopischen Maxwellgleichungen:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} - \dot{\vec{D}} &= \vec{j}\end{aligned}$$

Hierbei sind ρ und $\vec{j}$ jetzt die makroskopisch relevanten Ladungs- und Stromdichten. Ein Teil der Ladungs- und Stromdichten ist jetzt bereits in $\vec{D}$ und in $\vec{H}$ -Feldern enthalten. Der materialspezifische Zusammenhang zwischen Feldern und Polarisation/Magnetisierung wird durch die Materialgleichung bestimmt. Im allgemeinsten Fall wird dies durch Funktionale bestimmt.

$$\begin{aligned}\vec{P}(\vec{r}, t) &= \vec{P} \left[\vec{E}(\vec{r}, t), \vec{B}(\vec{r}, t) \right] \Rightarrow \vec{D}(\vec{r}, t) = \vec{D} \left[\vec{E}(\vec{r}, t), \vec{B}(\vec{r}, t) \right] \\ \vec{M}(\vec{r}, t) &= \vec{M} \left[\vec{E}(\vec{r}, t), \vec{B}(\vec{r}, t) \right] \Rightarrow \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H} \left[\vec{E}(\vec{r}, t), \vec{B}(\vec{r}, t) \right]\end{aligned}$$

Spezialfall: lineare Medien, lokaler Zusammenhang

$$P_i(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \underbrace{\int_0^\infty dt'}_{\text{Kausalitaet}} \overbrace{\chi_{ij}(\vec{r}, t')}^{\text{dielektrische Suszeptibilitaet}} E_j(\vec{r}, t - t') + \dots + \underbrace{P_i^{(0)}(\vec{r}, t)}_{\text{thermische Fluktationen}}$$

Das Zeitintegral trägt der Kausalität Rechnung und läuft effektiv nur über die endliche Zeit, die durch das Gedächtnis des Systems gegeben ist. Die thermischen Fluktationen werden im folgenden vernachlässigt.

Bei der Betrachtung im Frequenzraum ergibt sich:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= \int d\omega \, e^{-i\omega t} \vec{E}(\vec{r}, \omega) \\ \vec{P}(\vec{r}, t) &= \int d\omega \, e^{-i\omega t} \vec{P}(\vec{r}, \omega) \\ \chi_{ij}(\vec{r}, \omega) &= \int_0^\infty d\tau \, \chi_{ij}(\vec{r}, \tau) e^{i\omega\tau}\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Materialgleichung

$$P_i(\vec{r}, \omega) = \epsilon_0 \chi_{ij}(\vec{r}, \omega) E_j(\vec{r}, \omega)$$

Mit $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ ergibt sich:

$$D_i(\vec{r}, \omega) = \underbrace{\epsilon_0 (\delta_{ij} + \chi_{ij}(\vec{r}, \omega))}_{\epsilon_{ij}(\vec{r}, \omega)} E_j(\vec{r}, \omega)$$

wobei $\epsilon_{ij}(\vec{r}, \omega)$ der komplexwertige Dielektrizitätstensor ist.

Spezialfall: schmalbandige Felder

$$\epsilon_{ij}(\vec{r}, \omega) \approx \epsilon_{ij}(\vec{r}, \omega_0) \equiv \epsilon_{ij}(\vec{r})$$

dann gilt approximativ

$$D_i(\vec{r}, t) = \epsilon_{ij}(\vec{r}) E_j(\vec{r}, t)$$

bzw. für isotrope Medien

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}, t)$$

Oft $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$, wobei ϵ_r die relative Dielektrizitätskonstante und $\epsilon(\vec{r})$ die Dielektrizitätskonstante ist.

Analog können die magnetischen Medien betrachtet werden. Für isotrope Medien gilt:

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\underbrace{\mu(\vec{r})}_{\text{Permeabilität}}} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) \text{ mit } \mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$$

1.3 Kramers-Kronig-Beziehung

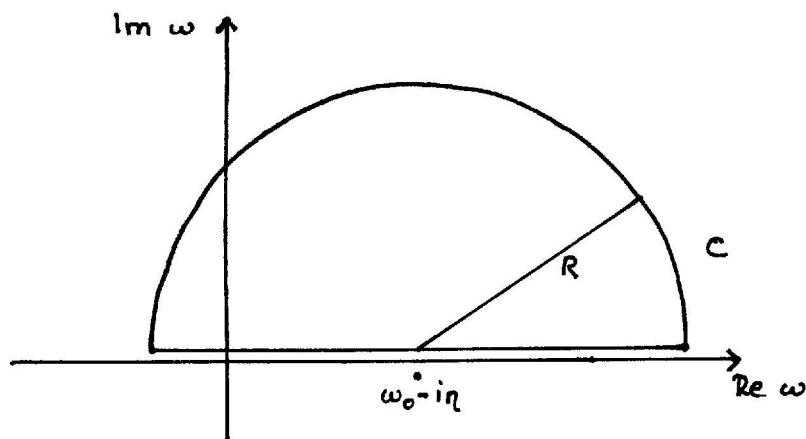
Sind Real- und Imaginärteil der Suszeptibilität

$$\chi(\omega) = \int_0^\infty d\tau e^{i\omega\tau} \chi(\tau)$$

voneinander unabhängig?

Untersucht wird folgendes Kurvenintegral in der komplexen Ebene:

$$I = \lim_{\eta \rightarrow +0} \oint_C \frac{\chi(\omega)}{\omega - \omega_0 + i\eta} d\omega$$



$$\chi(\omega) = \int_0^\infty d\tau \exp\{-\tau \operatorname{Im} \omega + i\tau \operatorname{Re} \omega\} \chi(\tau)$$

Dieses Integral ist endlich für $\operatorname{Im} \omega > 0$ (obere Halbebene).

Falls $\operatorname{Im} \omega = 0$, so gilt:

$$\left| \int_0^\infty d\tau e^{i\tau \operatorname{Re} \omega} \chi(\tau) \right| < \int_0^\infty d\tau |e^{i\tau \operatorname{Re} \omega}| \chi(\tau) = \int_0^\infty d\tau \chi(\tau) = \chi_s$$

Für statische Felder gilt:

$$P(t) = P_s = \int_0^\infty \epsilon_0 d\tau \chi(\tau) \underbrace{E(t-\tau)}_{E_s} = \epsilon_0 \chi_s E_s$$

$\Rightarrow \chi(\omega)$ ist in der gesamten oberen Halbebene regulär.

Bemerkung:

Dies ist Folge der Kausalität, d.h. der unteren Integrationsgrenze in $\chi(\omega) = \int_0^\infty d\tau e^{i\omega\tau} \chi(\tau)!$

$\Rightarrow$ Der Integrand von I hat keine Polstelle innerhalb von C

$$\Rightarrow I = 0 = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^\infty \frac{\chi(\omega)}{\omega - \omega_0 + i\eta} d\omega + \int_{\text{Kreisbogen}} \frac{\chi(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega$$

Mit $\omega = \omega_0 + R e^{i\varphi}$ gilt:

$$\int_{\text{Kreisbogen}} \frac{\chi(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega = i \int_0^\pi \frac{\chi(\omega_0 + R e^{i\varphi})}{R e^{i\varphi}} R e^{i\varphi} d\varphi = i \int_0^\pi \chi(\omega_0 + R e^{i\varphi}) d\varphi$$

mit

$$\chi(\omega_0 + R e^{i\varphi}) = \int_0^\infty d\tau \exp\{-\tau R \sin \varphi + i\tau [\omega_0 + R \cos \varphi]\} \chi(\tau)$$

Dies verschwindet für $R \rightarrow \infty$ und für $0 < \varphi < \pi$.

$$\Rightarrow \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^\infty \frac{\chi(\omega)}{\omega - \omega_0 + i\eta} d\omega = 0$$

$$0 = \lim_{\eta \rightarrow 0} \left\{ \underbrace{\int_{-\infty}^\infty \frac{(\omega - \omega_0)\chi(\omega)}{(\omega - \omega_0)^2 + \eta^2} d\omega}_{(1)} - \underbrace{\int_{-\infty}^\infty \frac{i\eta\chi(\omega)}{(\omega - \omega_0)^2 + \eta^2} d\omega}_{(2)} \right\}$$

Es folgt für (1)

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{(\omega - \omega_0)\chi(\omega)}{(\omega - \omega_0)^2 + \eta^2} d\omega \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} C.H. \int_{-\infty}^\infty \frac{\chi(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega$$

und für (2)

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{i\eta\chi(\omega)}{(\omega - \omega_0)^2 + \eta^2} d\omega \text{ mit } \delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\eta}{x^2 + \eta^2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow -i\pi \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0) \chi(\omega) d\omega &\rightarrow i\pi \chi(\omega_0) \\ \Rightarrow \chi(\omega_0) &= \frac{1}{i\pi} C.H. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega \end{aligned}$$

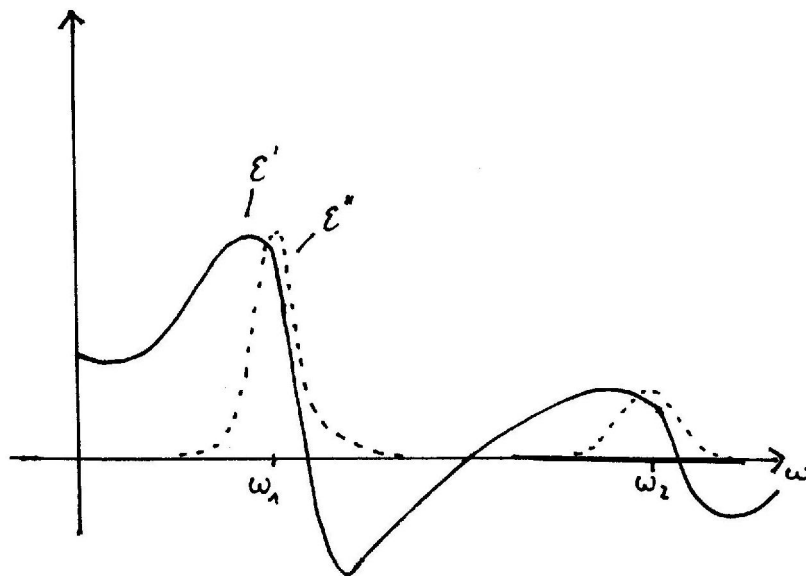
Mit $\chi(\omega) = \chi'(\omega) + i\chi''(\omega)$ folgen die Kramer-Kronig-Relationen:

$$\begin{aligned} \chi'(\omega_0) &= \frac{1}{\pi} C.H. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi''(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega \\ \chi''(\omega_0) &= -\frac{1}{\pi} C.H. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi'(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega \end{aligned}$$

D.h. Realteil und Imaginärteil der Suszeptibilität (und damit auch der dielektr. Funktion) sind nicht frei wählbar.

Bemerkung:

- Sind keine Materialeigenschaften sondern Ausdruck des Kausalitätsprinzips
- praktische Relevanz: aus der Messung von χ'' wird typischerweise χ' bestimmt



ω_1 und ω_2 werden Mediumresonanzen genannt. Dort tritt der Energieverlust des elektromagnetischen Feldes auf.

1.4 Integrale Maxwellgleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0 \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} - \dot{\vec{D}} = \vec{j} \quad (4)$$

Wir integrieren (3) über dem Volumen V

$$\underbrace{\int_V d^3\vec{r} \vec{\nabla} \cdot \vec{D}}_{\int_{(V)} d\vec{a} \cdot \vec{D}} = \underbrace{\int_V d^3\vec{r} \rho}_{Q \rightarrow \text{Gesamtladung in } V}$$

$\Rightarrow$ Der Fluß des Verschiebungsfeldes durch die Oberfläche eines Volumens ist gleich der darin enthaltenen Ladung.

Beim integrieren über (1) ergibt sich:

$$\int_{(V)} d\vec{a} \cdot \vec{B} = 0$$

$\Rightarrow$ Der Fluß der magnetischen Induktion durch die Oberfläche eines jeden endlichen Volumens verschwindet $\rightarrow \nexists$ magnetische Ladungen

Wir integrieren (4) über der Fläche a :

$$\underbrace{\int_a d\vec{a} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H}}_{\int_{(a)} d\vec{r} \cdot \vec{H}} = \underbrace{\int_a d\vec{a} \cdot \vec{j}}_I + \int_a d\vec{a} \cdot \dot{\vec{D}}$$

Für zeitlich unveränderliche Flächen gilt:

$$\int_{(a)} d\vec{r} \cdot \vec{H} = I + \frac{d}{dt} \int_a d\vec{a} \cdot \vec{D}$$

D.h. die Ladungsströme I und die “Verschiebungsströme“ $\frac{d}{dt} \int_a d\vec{a} \cdot \vec{D}$ führen zu Wirbeln des magnetischen Feldes.

Analog ergibt sich aus (2) das sogenannte “Induktionsgesetz“:

$$\int_{(a)} d\vec{r} \cdot \vec{E} = -\frac{d}{dt} \int_a d\vec{a} \cdot \vec{B}$$

D.h. zeitlich veränderlicher magnetischer Fluß führt zu Wirbeln des elektrischen Feldes, d.h. zur Induktion.

Bemerkung:

- Integrale und differentielle Maxwellgleichungen sind offensichtlich äquivalent.
- Historisch gesehen wurde zuerst die integrale Form gefunden. → physikalisch anschaulicher
- Die differentielle Form ist gelegentlich mathematisch geeigneter.

1.5 Mikroskopische und Makroskopische Elektrodynamik

$$\begin{array}{lcl} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho & & \left| \frac{d}{dt} \right. \\ \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{D}} = \dot{\rho} & & (*) \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} - \dot{\vec{D}} = \vec{j} & & \left| \cdot \vec{\nabla} \right. \\ \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H}}_0 - \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{D}}}_{(*)=\dot{\rho}} = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} \end{array}$$

$$\Rightarrow \dot{\rho} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

D.h. die Maxwellgleichungen enthalten die Ladungserhaltung, welche hier abgeleitet ist für die makroskopischen Ladungen. Offensichtlich gilt dies auch für die mikroskopischen Ladungen:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho' & \left| \frac{d}{dt} \right. \\ \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{E}} &= \frac{1}{\epsilon_0} \dot{\rho}' \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \dot{\vec{E}} &= \mu_0 \vec{j}' & \left| \cdot \vec{\nabla} \right. \\ \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \dot{\vec{E}} \right) &= \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j}' \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{c^2} \cdot \frac{1}{\epsilon_0 \cdot \mu_0} \dot{\rho}' = \vec{\nabla} \cdot \vec{j}' \quad \text{mit } \epsilon_0 \cdot \mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho & (*) \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} - \dot{\vec{D}} &= \vec{j} & (**) \end{aligned}$$

Wir eliminieren $\vec{D}$ und $\vec{H}$ -Feld zu Gunsten von $\vec{P}$ und $\vec{M}$.

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ \vec{H} &= \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} - \vec{M}) \end{aligned}$$

Aus (*) folgt:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \underbrace{(\rho - \vec{\nabla} \cdot \vec{P})}_{\rho' = \rho + \rho''} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho'$$

wobei $\rho'' = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$ gilt.

Aus (**) folgt:

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu_0} (\vec{B} - \vec{M}) \right) - \epsilon_0 \dot{\vec{E}} - \dot{\vec{P}} = \vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \dot{\vec{E}} = \mu_0 \underbrace{\left(\vec{j} + \dot{\vec{P}} + \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{M} \right)}_{\vec{j}' = \vec{j} + \vec{j}''}$$

wobei $\vec{j}'' = \dot{\vec{P}} + \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{M}$ ist.

D.h. wir haben makroskopische Maxwellgleichungen (*)/(**) in die Form der mikroskopischen Maxwellgleichungen gebracht,

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho' \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \dot{\vec{E}} &= \mu_0 \vec{j}' \end{aligned}$$

jedoch für modifizierte Ladungen und Stromdichten ρ' und $\vec{j}'$.

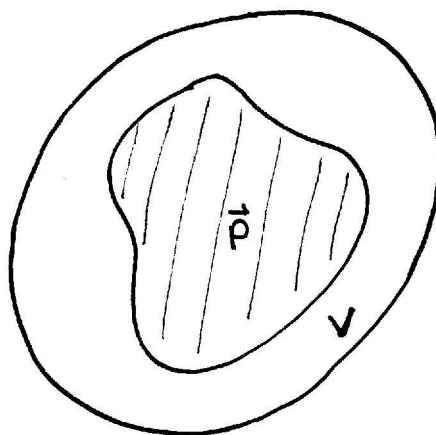
Sowohl für ρ' und $\vec{j}'$, als auch für ρ und $\vec{j}$ gilt die Kontinuitätsgleichung.

$\rho, \vec{j}$: "sichtbare" oder "freie" Ladungen bzw. deren Stromdichte

$\rho'', \vec{j}''$: "unsichtbare" oder "gebundene" Ladungen bzw. deren Stromdichte, die Anlaß zur Polarisation $\vec{P}$ und Magnetisierung $\vec{M}$ des Mediums geben

Interpretation der unsichtbaren Ladungen?

Wir betrachten einen makroskopischen Körper mit endlichem Volumen.



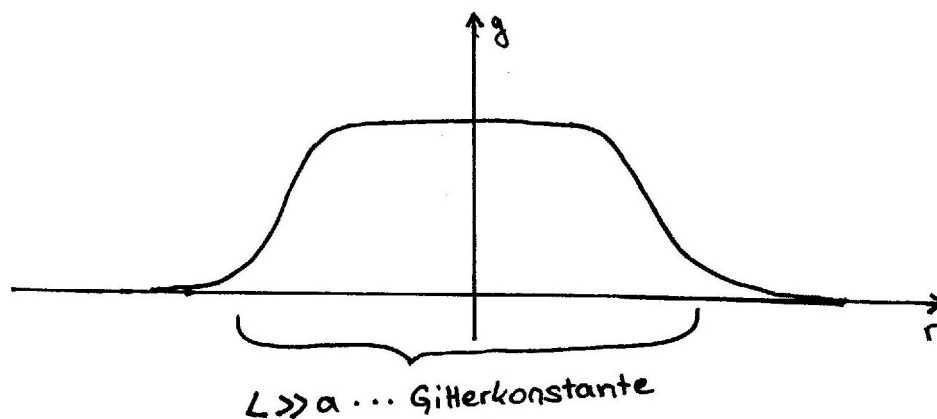
$$Q'' = \int_V d^3\vec{r} \underbrace{\rho''}_{=-\vec{\nabla} \cdot \vec{P}} = - \int_{(V)} d\vec{a} \cdot \vec{P} = 0$$

Da $\vec{P}$ außerhalb des Körpers verschwindet, resultiert die Ladungsdichte der unsichtbaren Ladungen in verschwindender Gesamtladung.

Für weitere Betrachtungen definieren wir eine Mittelung der Feldfunktion mit einer reellen Testfunktion $g(\vec{r})$:

$$\langle F(\vec{r}, t) \rangle = \int d^3\vec{r}' g(\vec{r}') F(\vec{r} - \vec{r}', t)$$

Diese Testfunktion ist isotrop, auf Eins normiert und glatt im Bezug auf den Abstand atomarer Bausteine.



Offensichtlich gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \langle F(\vec{r}, t) \rangle &= \int d^3\vec{r}' g(\vec{r}') \frac{\partial F(\vec{r} - \vec{r}', t)}{\partial x_i} = \left\langle \frac{\partial F(\vec{r} - \vec{r}', t)}{\partial x_i} \right\rangle \\ \frac{\partial}{\partial t} \langle F(\vec{r}, t) \rangle &= \int d^3\vec{r}' g(\vec{r}') \frac{\partial F(\vec{r} - \vec{r}', t)}{\partial t} = \left\langle \frac{\partial F(\vec{r} - \vec{r}', t)}{\partial t} \right\rangle \end{aligned}$$

Angewendet auf die Maxwellgleichungen heißt das, daß die Mittelung der mikroskopischen Gleichungen resultieren in:

$$\langle \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \rangle = \vec{\nabla} \cdot \langle \vec{B} \rangle = 0 \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \text{ (makroskopische Gleichung)}$$

$$\langle \vec{\nabla} \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} \rangle = \vec{\nabla} \times \langle \vec{E} \rangle + \frac{\partial \langle \vec{B} \rangle}{\partial t} \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0 \text{ (makroskopische Gleichung)}$$

Jetzt werden die inhomogenen Gleichungen betrachtet:

$$\langle \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \rangle = \vec{\nabla} \cdot \langle \vec{E} \rangle = \frac{1}{\epsilon_0} \langle \rho \rangle \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \langle \rho \rangle$$

und

$$\langle \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \dot{\vec{E}} \rangle = \vec{\nabla} \times \langle \vec{B} \rangle - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \langle \vec{E} \rangle}{\partial t} = \mu_0 \langle \vec{j} \rangle \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \dot{\vec{E}} = \mu_0 \langle \vec{j} \rangle$$

Nun wird die Ladungsdichte genauer betrachtet:

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}, t) &= \underbrace{\rho_f(\vec{r}, t)}_{\text{freie Ladungen}} + \underbrace{\rho_{at}(\vec{r}, t)}_{\text{atomare Ladungen}} \\ \rho_{at}(\vec{r}, t) &= \sum_n^{\text{alle Atome}} \rho_n(\vec{r}, t) \\ \rho_n(\vec{r}, t) &= \sum_{\alpha_n}^{\text{alle Ladungen des } n\text{-ten Atoms}} q_{\alpha_n} \delta(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha_n}(t)) \end{aligned}$$

Nun werden Mittelpunktskoordinaten $\vec{r}_n$ und Relativkoordinaten $\vec{r}_{\alpha_n}$ eingeführt

$$\vec{r}_{\alpha_n} \rightarrow \vec{r}_n + \vec{r}_{\alpha_n}$$

damit

$$\langle \rho(r, t) \rangle = \sum_{\alpha_n} q_{\alpha_n} \int d^3\vec{r} g(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}' - \vec{r}_n(t) - \vec{r}_{\alpha_n}(t)) = \sum_{\alpha_n} q_{\alpha_n} g[\vec{r} - \vec{r}_n(t) - \vec{r}_{\alpha_n}(t)]$$

Nun wird die Taylor-Entwicklung innerhalb des Atoms gemacht.

$$\langle \rho_n \rangle = \sum_{\alpha_n} q_{\alpha_n} \left\{ g(\vec{r} - \vec{r}_n) - \vec{\nabla} \cdot \vec{r}_{\alpha_n} g(\vec{r} - \vec{r}_n) + \dots \right\}$$

mit $q_n = \sum_{\alpha_n} q_{\alpha_n}$ als Gesamtladung des n-ten Atoms und $\vec{d}_n = \sum_{\alpha_n} q_{\alpha_n} \vec{r}_{\alpha_n}(t)$ als Dipolmoment des n-ten Atoms.

Hieraus folgt:

$$\langle \rho_n(\vec{r}, t) \rangle = q_n g(\vec{r} - \vec{r}_n(t)) - \vec{\nabla} \cdot \vec{d}_n(t) g(\vec{r} - \vec{r}_n) + \dots = \langle q_n \delta(\vec{r} - \vec{r}_n(t)) - \vec{\nabla} \cdot \langle \vec{d}_n(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_n(t)) \rangle + \dots$$

Nun wird über alle Beiträge summiert und ausgenutzt, daß gilt

$$\rho(\vec{r}, t) \equiv \left\langle \rho_f(r, t) + \sum_n q_n(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_n(t)) \right\rangle$$

$$\vec{P}(\vec{r}, t) \equiv \left\langle \sum_n \vec{d}_n(t) \delta(r - r_n(t)) \right\rangle$$

Damit wurde gezeigt, daß folgendes gilt:

$$\langle \rho \rangle = \rho(\vec{r}, t) - \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r}, t)}_{\rho''} \equiv \rho'(\vec{r}, t)$$

Wobei $\rho(\vec{r}, t)$ als “wahre“, “freie“ Ladung, ρ'' als “unsichtbare“ Ladung und $\rho'(\vec{r}, t)$ als Quelle des gemittelten $\vec{E}$ -Feldes bezeichnet wird.

Analog hierzu die Betrachtung für die mikroskopische Stromdichte im ruhenden Medium.

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha}(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}(t))$$

Dies führt auf

$$\langle \vec{j}(\vec{r}, t) \rangle \rightarrow \vec{j}'(\vec{r}, t) = j(\vec{r}, t) + \dot{\vec{P}}(\vec{r}, t) + \mu_0^{-1} \vec{\nabla} \times \vec{M}(\vec{r}, t)$$

mit der Magnetisierung

$$\vec{M}(\vec{r}, t) = \left\langle \sum_n \vec{m}_n(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_n(t)) \right\rangle$$

wobei das magnetische Moment des n-ten Atoms $\vec{m}_n$ definiert ist durch:

$$\vec{m}_n = \frac{1}{2} \mu_0 \sum_{\alpha_n} q_{\alpha_n} \vec{r}_{\alpha_n}(t) \times \dot{\vec{r}}_{\alpha_n}(t) = \sum_{\alpha_n} \frac{\mu_0 q_{\alpha_n}}{2m_{\alpha_n}} \vec{L}_{\alpha_n}$$

Hierbei entspricht $\vec{L}_{\alpha_n}$ dem Drehimpuls der Ladung α_n

$\Rightarrow \vec{M}$ und $\vec{P}$ wurden auf atomistische Größen der Materie zurückgeführt.

2 Elektrostatik

2.1 Elektrisches Feld im Vakuum

Wir untersuchen zunächst zeitunabhängige Felder.

$$\dot{\vec{E}} = \dot{\vec{D}} = \dot{\vec{B}} = \dot{\vec{H}} = 0$$

damit vereinfachen sich die Maxwellgleichungen zu

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}$$

Bei den ersten beiden Gleichungen handelt es sich um elektrische Feldgleichungen, welche der Elektrostatik angehören, und bei den letzten beiden Gleichungen um magnetische Feldgleichungen (Magnetostatik).

Voraussetzungen für statische Felder?

$$\dot{\vec{D}} = 0 \Rightarrow 0 = \vec{\nabla} \dot{\vec{D}} = \dot{\rho}$$

wegen

$$\dot{\rho} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

$\Rightarrow$ Es existieren keine Stromquellen im Endlichen.

$$\dot{\vec{H}} = 0 \Rightarrow 0 = \vec{\nabla} \times \dot{\vec{H}} = \dot{\vec{j}} \Rightarrow \dot{\vec{j}} = 0$$

$\Rightarrow$ Die Stromdichte ist zeitlich konstant.

Bemerkung:

$$\dot{\rho} = 0 \text{ und } \dot{\vec{j}} = 0$$

mit $\vec{j} \neq 0$ nur für “verschmierte“ Ladungs- und Stromdichte erfüllbar, da für punktförmige Ladungen gilt:

$$\rho = \sum q_{\alpha} \delta(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha})$$

und daher $\dot{\rho} = 0$ ruhende Ladungen bedeutet

Elektrisches Feld von Punktladungen?

Sei $\rho(\vec{r}) = q \delta(\vec{r})$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\Rightarrow \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = q \delta(r)$$

weiter gilt:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

Wir suchen nun die Lösung dieser beiden Differentialgleichungen. Das Problem ist kugelsymmetrisch:

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = E(r) \frac{\vec{r}}{r}$$

Das Feld ist wirbelfrei, was heißt, daß automatisch $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ erfüllt wird.

Es bleibt weiterhin:

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = q \delta(r) & \quad \left| \int_V d^3\vec{r} \right. \\ \underbrace{\epsilon_0 \int_V d^3\vec{r} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r})}_{=} & = q \\ \epsilon_0 \int_{(V)} d\vec{a} \cdot \vec{E}(\vec{r}) & \end{aligned}$$

Bei Integration über einer Kugel vom Radius r ergibt sich:

$$\epsilon_0 \int_{(V)} d\vec{a} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 4\pi r^2 \epsilon_0 E(r)$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Verallgemeinert gilt für N_α Punktladungen an $\vec{r}_\alpha$:

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \sum_{\alpha} q_{\alpha} \frac{\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}}{|\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}|^3}$$

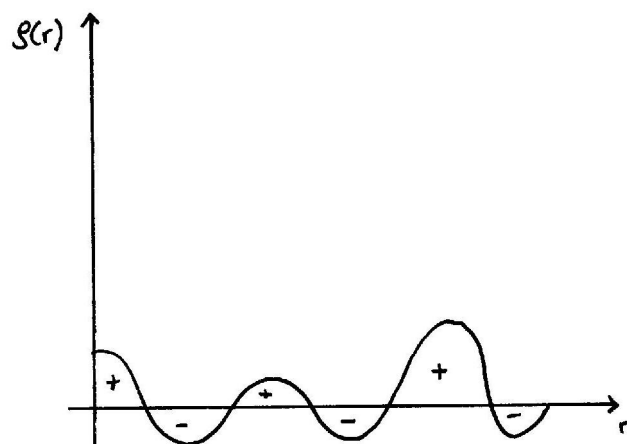
Übergang zur kontinuierlichen Ladungsverteilung:

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$\Rightarrow$ “quellenmäßige Darstellung“ des E-Feldes

Beispiele zur Feldberechnung:

1. Kugelsymmetrische Ladungsverteilung



Die “quellenmäßige Darstellung“ ist immer möglich:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') d^3 \vec{r}'$$

Die Rechnung ist beliebig kompliziert. Oft ist es also einfacher vom Gauß'schen Gesetz zu starten.

$$\int_{(V)} d\vec{a} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) d^3 \vec{r}$$

Wir wählen als Integrationsgebiet eine Kugel, die die Ladung zentrisch einschließt.

$$\underbrace{\int_{|\vec{r}|=r} d\vec{a} \cdot \vec{E}}_{\frac{1}{\epsilon_0} Q'} = E(r) \int_{|\vec{r}|=r} da = E(r) 4\pi r^2$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{Q'}{r^2}$$

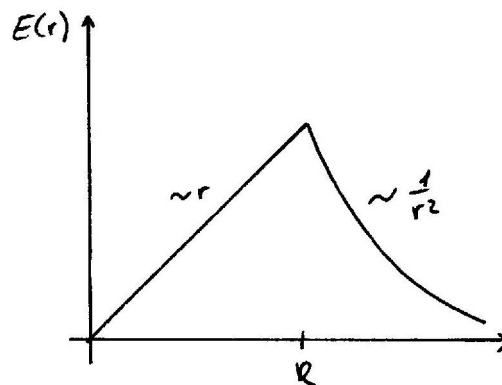
Speziell:

Für eine homogen geladene Kugel mit Radius R und Gesamtladung Q gilt:

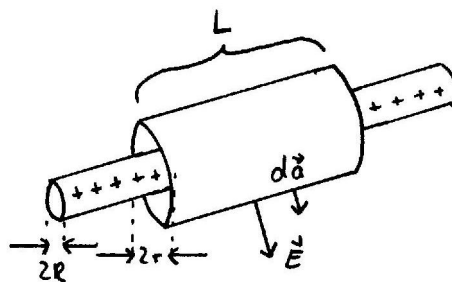
$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} & |\vec{r}| \leq R \\ 0 & |\vec{r}| > R \end{cases}$$

$$\Rightarrow Q'(r) = \begin{cases} Q \frac{r^3}{R^3} & r \leq R \\ Q & r > R \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \begin{cases} \frac{Qr}{R^3} & r \leq R \\ \frac{Q}{r^2} & r > R \end{cases}$$



2. Linienladung (∞ langer Stab)



λ ist die Ladung pro Längeneinheit (homogen geladen)

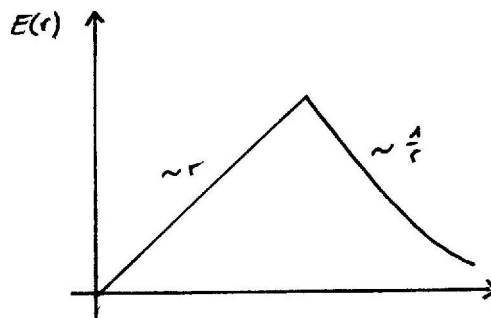
$$\int_{(\text{Zylinder})} d\vec{a} \cdot \vec{E} = E(r) \cdot 2\pi r \cdot L$$

Da $d\vec{a} \perp \vec{E}$ gibt es keinen Beitrag von der Leiterfläche. Für die eingeschlossene Ladung gilt:

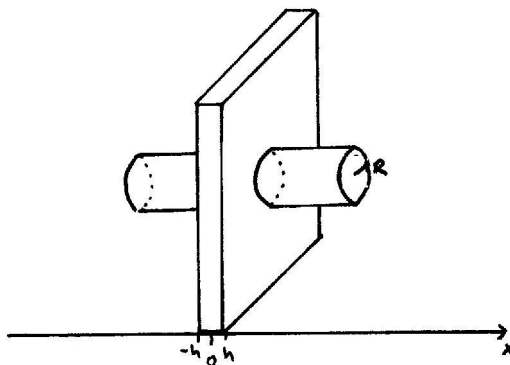
$$\int_{(\text{Zylinder})} d\vec{a} \cdot \vec{E} = \frac{Q'}{\epsilon_0}$$

$$Q'(r) = \begin{cases} \lambda \cdot L \frac{r^2}{R^2} & r \leq R \\ \lambda \cdot L & r > R \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(r) = \begin{cases} \frac{\lambda r}{\epsilon_0 2\pi R^2} & r \leq R \\ \frac{\lambda}{\epsilon_0 2\pi r} & r > R \end{cases}$$



3. homogen geladene, ∞ ausgedehnte Fläche



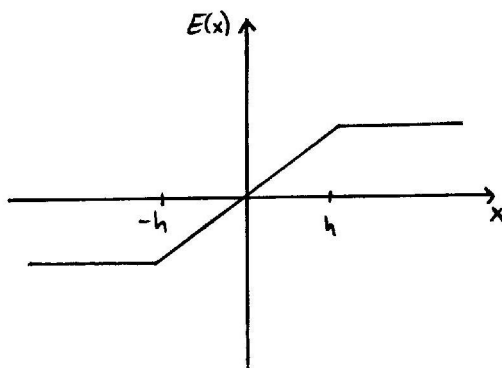
σ ist die Ladung pro Flächeneinheit.

$$Q' = \begin{cases} \sigma \cdot \pi R^2 & |x| > h \\ \sigma \cdot \pi R^2 \frac{x}{h} & |x| \leq h \end{cases}$$

$$\frac{Q'}{\epsilon_0} = \int_{(\text{Zylinder})} d\vec{a} \cdot \vec{E} = E(x) \cdot 2 \cdot \int_{\text{Zylindergrundfläche}} d\vec{a} = 2 \cdot E(x) \cdot \pi R^2$$

mit $\vec{E} \perp d\vec{a}$ auf dem Zylindermantel.

$$\Rightarrow E(x) = \frac{Q'}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{2\pi R^2} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} & |x| > h \\ \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \frac{x}{h} & |x| \leq h \end{cases}$$



Bemerkung: Abklingverhalten für $r \rightarrow \infty$

- Punktladung: $E(r) \propto r^{-2}$
- Linienladung: $E(r) \propto r^{-1}$
- Flächenladung: $E(r) \propto r^0$

Coulombsches Kraftgesetz

Die Punktladung q_1 sei an $\vec{r}_1$

$$\vec{E}(\vec{r}_2) = \frac{q_1}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

Die Probeladung q_2 an $\vec{r}_2$ erfährt nach dem Lorentzschen Kraftgesetz:

$$\vec{F} \equiv \vec{F}_{21} = q_2 \cdot \vec{E}(\vec{r}_2)$$

D.h. für das “Coulombsches Kraftgesetz“ gilt

$$\vec{F}_{21} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

Bemerkung:

1. Umgekehrt erfährt q_1 im Feld der Ladung q_2 die Kraft

$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} = -\vec{F}_{21}$$

2. Wir haben in $\vec{F}_{21}$ nur das Feld von q_1 betrachtet, nicht das Feld von q_2 . Dieses wäre unendlich groß, aber nicht gerichtet, da die Punktladung im Zentrum ihres eigenen Feldes ist. Die sogenannte “Selbstwechselwirkung“ tritt aber bei der kontinuierlichen Ladungsdichte auf. Dann gilt für die Kraftdichte:

$$\vec{f}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r})$$

Diese wirkt auf

$$dq = dV \rho(\vec{r}) \text{ mit } d\vec{F} = dV \rho(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r})$$

3. Das Coulomb-Gesetz folgt dem gleichen Abstandsgesetz wie die Gravitationskraft. Es kann allerdings anziehend und abstoßend wirken. Die Coulombkraft ist sowohl zentral, als auch konservativ.
4. Das Coulomb-Gesetz verknüpft Ladungen mit Kräften und Längen und legt damit den Wert von ϵ_0 fest.

2.2 Skalares Potential

Wir starten wieder von den elektrischen Feldgleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

$\vec{E}$ muß als Gradient eines skalaren Potentials darstellbar sein:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \varphi(\vec{r})$$

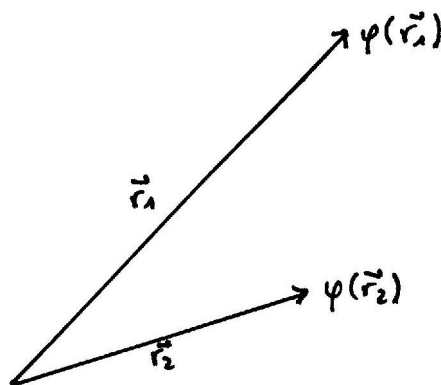
Damit folgt aus obiger Feldgleichung die Poisson-Gleichung:

$$\Delta \varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r})$$

Damit kann die Berechnung des elektrischen Feldes auf die Lösung der Poisson-Gleichung für das skalare Potential zurückgeführt werden.

φ kann nur bis auf eine Konstante bestimmt werden.

⇒ Nur die Potentialdifferenz ist physikalisch relevant. Diese Potentialdifferenzen werden als „Spannung“ U bezeichnet.



$$U = U_{12} = \varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2)$$

Die Einheit des Potentials/der Spannung ist das Volt. $[\varphi] = [U] = V$

Offensichtlich hat die Punktladung q bei $\vec{r}'$ folgendes Potential

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

denn es gilt:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Die Poissonsgleichung ist linear, d.h. für das Potential gilt das Superpositionsprinzip.

Dies bedeutet, daß das Potential mehrerer Punktladungen gegeben ist durch

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}}{|\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}|}$$

bzw. für eine inselförmige Ladungsdichte

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Ist eine Lösung der Poisson-Gleichung bekannt, können weitere konstruiert werden, indem beliebige Lösungen der homogenen Potentialgleichung (d.h. Laplace-Gleichung) addiert werden. → Wir können damit RB befriedigen.

$\Delta\varphi = 0$ “Laplace – Gleichung“

Bemerkung:

Die “Green-Funktion“ der Poisson-Gleichung ist definiert durch

$$\Delta G_0(r) = -\delta(r)$$

Es gilt die Identität

$$\underbrace{\rho(\vec{r})}_{-\epsilon_0 \Delta\varphi(\vec{r})} = \int d^3\vec{r}' \underbrace{\delta(\vec{r} - \vec{r}')}_{-\Delta G_0(\vec{r} - \vec{r}')} \rho(\vec{r}')$$

d.h.

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' G_0(\vec{r} - \vec{r}') \rho(\vec{r}')$$

Speziell bei einer Punktladung bei $\vec{r}''$

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r}) &= \frac{1}{\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' G_0(\vec{r} - \vec{r}') q \delta(\vec{r}' - \vec{r}'') \\ \Rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}''|} &= \frac{q}{\epsilon_0} G_0(\vec{r} - \vec{r}'') \\ \Rightarrow G_0(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{|\vec{r}|}\end{aligned}$$

damit ergibt sich

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

d.h. das bekannte Ergebnis wurde reproduziert durch den “Umweg“ über die Green-Funktion.

Aus dem Potential

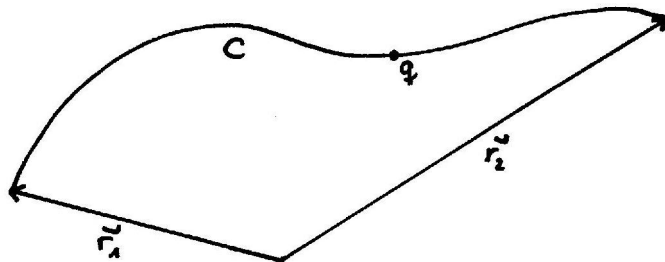
$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

folgt die Feldstärke

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \rho(r') \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \rho(r') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

2.3 Energie des elektrischen Feldes

Wir verschieben die Punktladung q im Feld $\vec{E}(\vec{r})$ längs einer Kurve C .



Für die verrichtete Arbeit gilt:

$$W = \int_C d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = q \int_C d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r})$$

mit $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$ folgt

$$\begin{aligned} W &= -q \int_C d\vec{r} \cdot \vec{\nabla}\varphi \\ &= -q \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\varphi \\ &= q(\varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2)) \\ &= q U_{12} \end{aligned}$$

Die Arbeit ist wegunabhängig, da $\vec{E}$ ein Potential besitzt. Wir können nun die potentielle Energie

$$W_{pot}(\vec{r}) = q \varphi(\vec{r})$$

eingeführen. Sie mißt die Arbeit, die an der Punktladung zu verrichten ist, um sie aus dem Unendlichen an Punkt $\vec{r}$ zu verschieben.

$$W_{pot}(\vec{r}) = -q \int_{\infty}^{\vec{r}} d\vec{r}' \cdot \vec{E}(\vec{r}') = q \int_{\infty}^{\vec{r}} d\varphi = q\varphi(\vec{r})$$

Das Potential einer bei $\vec{r}'$ befindlichen Punktladung q' war:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

⇒ Die potentielle Energie einer Punktladung q bei $\vec{r}$ im Feld von q' bei $\vec{r}'$ ist gegeben durch

$$W_{pot} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q q'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Wir berechnen nun die Arbeit, um endliches Punktladungssystem zu installieren.

Wir bringen $q_1 \rightarrow \vec{r}_1$. Dies erfordert keine Arbeit, $W_1 = 0$.

$q_2 \rightarrow \vec{r}_2$ erfordert $W_2 = q_2 \varphi_1(\vec{r}_2) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$

$q_3 \rightarrow \vec{r}_3$ erfordert $W_3 = q_3(\varphi_1(\vec{r}_3) + \varphi_2(\vec{r}_3)) = \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} + \frac{q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \right)$

Offensichtlich gilt:

$$W_\alpha = q_\alpha \sum_{\alpha'=1}^{\alpha-1} \varphi_{\alpha'}(\vec{r}_\alpha) = \frac{q_\alpha}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\alpha'=1}^{\alpha-1} \frac{q'_{\alpha'}}{|\vec{r}_\alpha - \vec{r}_{\alpha'}|}$$

Um die Gesamtarbeit um N Punktladungen zu installieren gilt:

$$W = \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\alpha'=1}^{\alpha-1} \frac{q_\alpha q'_{\alpha'}}{|\vec{r}_\alpha - \vec{r}_{\alpha'}|} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{\alpha \neq \alpha'} \frac{q_\alpha q'_{\alpha'}}{|\vec{r}_\alpha - \vec{r}_{\alpha'}|}$$

Anmerkung:

Es werden über alle α, α' summiert mit $\alpha \neq \alpha'$, d.h. die Selbstenergie ist nicht enthalten.

Verallgemeinert gilt für kontinuierliche, inselförmige Ladungsverteilungen:

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r} \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Bemerkung:

Im Energieinhalt oben ist die Selbstenergie enthalten.

Mit $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ folgt:

$$W = \frac{1}{2} \int d^3\vec{r} \rho(\vec{r}) \varphi(\vec{r})$$

Weiteren Umformung mittels der Poisson-Gleichung

$$\Delta\varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r})$$

ergibt

$$W = -\frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\vec{r} \varphi(\vec{r}) \Delta\varphi(\vec{r}) = -\frac{\epsilon_0}{2} \left\{ \underbrace{\int d^3\vec{r} \vec{\nabla}(\varphi(\vec{r}) \vec{\nabla}\varphi(\vec{r}))}_{=} - \int d^3\vec{r} (\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}))^2 \right\}$$

$$\int_{(V)} d\vec{a} \varphi(\vec{r}) \vec{\nabla}\varphi(\vec{r})$$

Für

$$V \rightarrow \infty \begin{cases} \varphi \propto \frac{1}{r} \\ \vec{\nabla}\varphi \propto \frac{1}{r^2} \\ (V) \propto r^2 \end{cases}$$

läuft $\int_{(V)} d\vec{a} \varphi(\vec{r}) \vec{\nabla}\varphi(\vec{r})$ gegen 0.

Somit ergibt sich

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\vec{r} (\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}))^2$$

Dies ergibt mit $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$

$$W_{el} = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\vec{r} \vec{E}^2(\vec{r})$$

Die obige Gleichung impliziert eine Energiedichte

$$w_{el}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2(\vec{r})$$

die auch in Raumbereichen von Null verschieden ist, in denen keine Ladung existiert.

Bemerkung:

- Im Fall eines linearen Hintergrundmediums mit $\epsilon(\vec{r})$ gilt

$$w_{el}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \vec{D}(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r})$$

•

$$W = \frac{1}{8 \pi \epsilon_0} \sum_{\alpha \neq \alpha'} \frac{q_\alpha q_{\alpha'}}{|r_\alpha - r_{\alpha'}|}$$

kann größer oder kleiner Null sein.

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3 \vec{r} \vec{E}^2(\vec{r})$$

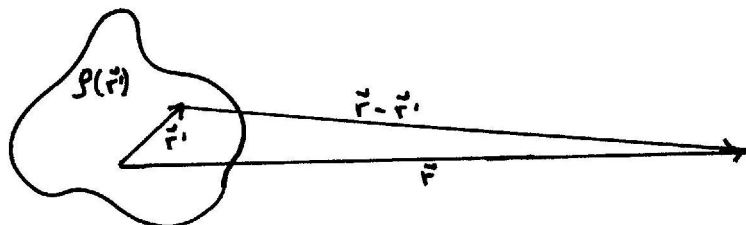
hingegen ist immer größer Null!

Warum?

Da die Selbstenergie im ersten Ausdruck nicht enthalten ist!

2.4 Multipolentwicklung

Eine räumlich beschränkte Ladungsverteilung:



Wir interessieren uns für das Fernfeld dieser Ladung bei $\vec{r}$ mit $|\vec{r}'| \ll |\vec{r}|$

Das Potential ist gegeben durch

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \int d^3 \vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Es gilt:

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec{r}\vec{r}'} = r \sqrt{1 + \frac{r'^2}{r^2} - \frac{2\vec{r}\vec{r}'}{r^2}}$$

Sei $\vec{v}' = \frac{\vec{r}'}{r}$, es gelte $|\vec{v}'| \ll 1$.

Sei $\vec{e} = \frac{\vec{r}}{r}$ der Einheitsvektor zum Aufpunkt.

Damit ergibt sich

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = r\sqrt{1 + v'^2 - 2\vec{e}\vec{v}'}$$

Wir machen die Taylor-Entwicklung um $\vec{v}' = 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{\alpha=x,y,z} v'_\alpha \frac{\partial}{\partial v'_\alpha} \right)^n \frac{1}{r\sqrt{1 + v'^2 - 2\vec{e}\vec{v}'}} \\ &= \frac{1}{r} \left\{ 1 + \vec{e}\vec{v}' + \frac{1}{2} [3(\vec{e}\vec{v}')^2 - v'^2] + \dots \right\} \\ &= \frac{1}{|\vec{r}|} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{|\vec{r}|^3} + \frac{3(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2 - \vec{r}'^2 \cdot \vec{r}^2}{2|\vec{r}|^5} + \dots \end{aligned}$$

Damit gilt für das Potential

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') \left\{ \frac{1}{|\vec{r}|} + \frac{r_\alpha \cdot r'_\alpha}{|\vec{r}|^3} + \frac{r_\alpha \cdot r_\beta}{2|\vec{r}|^5} [3r'_\alpha \cdot r'_\beta - |\vec{r}'|^2 \delta_{\alpha\beta}] + \dots \right\}$$

(Konvention: summieren über doppelte Indizes)

Es gilt:

$$Q = \int d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}')$$

Wir definieren das Dipolmoment

$$p_\alpha = \int d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') r'_\alpha$$

und das Quadrupolmoment

$$Q_{\alpha\beta} = \int d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') [3r'_\alpha \cdot r'_\beta - |\vec{r}'|^2 \delta_{\alpha\beta}]$$

Somit erhalten wir für das Potential

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{Q}{|\vec{r}|} + \frac{r_\alpha \cdot p_\alpha}{|\vec{r}|^3} + \frac{r_\alpha \cdot r_\beta \cdot Q_{\alpha\beta}}{2|\vec{r}|^5} + \dots \right\}$$

Bemerkung:

- Der Tensor des Quadrupolmoments ist symmetrisch.

⇒ wir erwarten 6 unabhängige Komponenten

In Wirklichkeit sind es aber nur 5, da die Spur verschwindet:

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=1}^3 Q_{\alpha\alpha} &= \sum_{\alpha=1}^3 \int d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') \left[3r'_{\alpha}r'_{\alpha} - |\vec{r}'|^2 \right] \\ &= \int d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') \left[3|\vec{r}'|^2 - 3|\vec{r}'|^2 \right] = 0\end{aligned}$$

- Wir können die Taylor-Entwicklung nach kartesischen Koordinaten beliebig fortsetzen. Die Ausdrücke werden dann beliebig komplex.

⇒ Oft ist eine Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen vorteilhafter.

Übergang zu sphärischen Koordinaten:

$$\vec{r} \rightarrow (r, \Theta, \varphi)$$

$$\vec{r}' \rightarrow (r', \Theta', \varphi')$$

Dann gilt:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{r'^l}{r^{l+1}} \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}(\Theta, \varphi) Y_{lm}^*(\Theta', \varphi')$$

mit der komplexen Kugelflächenfunktion

$$Y_{lm}(\Theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \Theta) e^{im\varphi}$$

Dabei sind die reellen Funktionen P_l^m die zugeordneten Legendreschen Polynome.

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{d}{dx} \right)^m P_l(x)$$

Hier sind $P_l(x)$ die Legendreschen Polynome

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx} \right)^l (x^2 - 1)^l$$

Das Einsetzen in die Potentialgleichung liefert

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \sum_{m=-l}^l \frac{q_{lm}}{2l+1} Y_{lm}(\Theta, \varphi)$$

mit dem sphärischen Moment

$$q_{lm} = \int \rho(\vec{r}') r'^{l+1} Y_{lm}^*(\Theta', \varphi') \sin \Theta' d\varphi' d\Theta' dr'$$

Für den Zusammenhang mit den kartesischen Momenten gilt:

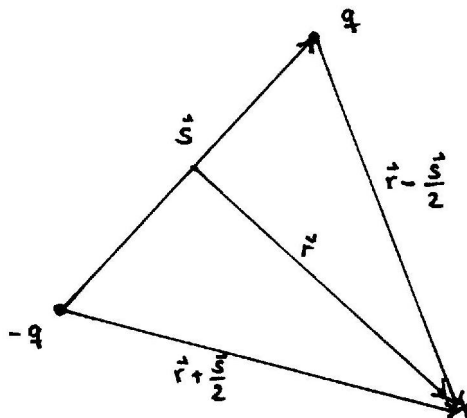
$$\begin{aligned} q_{00} &= Q && \text{Monopol} \\ q_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} (p_z) && \text{Dipol} \\ q_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} (p_x - ip_y) && \text{Dipol} \\ q_{1-1} &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}} (p_x + ip_y) && \text{Dipol} \\ q_{20} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} Q_{77} && \text{Quadrupol} \\ q_{2\pm 1} &= \pm \frac{1}{3} \sqrt{\frac{15}{8\pi}} (Q_{x7} \mp iQ_{y7}) && \text{Quadrupol} \\ q_{2\pm 2} &= \frac{1}{12} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} (Q_{xx} - iQ_{yy} \mp 2iQ_{xy}) && \text{Quadrupol} \end{aligned}$$

Bemerkung:

Sowohl sphärische Momente, als auch Kugelflächenfunktionen sind komplex. Im Potential heben sich die Imaginärteile aber auf.

Beispiel: Punktdipol

Wir betrachten 2 Punktladungen $-q, +q$ mit dem Abstand s .



Das Potential ist gegeben durch die Summe der Punktladungen.

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \frac{\vec{s}}{2}|} - \frac{1}{|\vec{r} + \frac{\vec{s}}{2}|} \right)$$

Wir machen die Taylorentwicklung für kleine $\vec{s}$ ($s \ll r$)

$$\varphi(\vec{r}) = -\frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{2} \vec{s} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r} + 0(s^3) \right)$$

Grenzübergang:

$$s \rightarrow 0$$

$$q \rightarrow \infty$$

Jedoch sei das Dipolmoment $q \cdot s = p$ konstant.

Es ergibt sich

$$\varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{p} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

Kraft auf einen Punktdipol

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} \left(\vec{r} + \frac{\vec{s}}{2} \right) - \vec{E} \left(\vec{r} - \frac{\vec{s}}{2} \right) \right)$$

Mit der Taylorentwicklung für kleine $\vec{s}$ ergibt sich:

$$\vec{F} = 2q \left(\frac{1}{2} \vec{s} \cdot \vec{\nabla} \vec{E}(\vec{r}) + \mathcal{O}(s^3) \right)$$

wobei $\mathcal{O}(s^3)$ den Nullvektor darstellt. Daraus folgt mit $s \rightarrow 0$ und $q \cdot s = p$:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{p} \cdot \vec{\nabla} \vec{E}(\vec{r})$$

Bemerkung:

Den Vektorgradient $\vec{\nabla} \vec{E} \neq \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ (Divergenz) komponentenweise interpretieren.

$$\vec{\nabla} \vec{E} = \begin{pmatrix} E_{x,x} & E_{x,y} & E_{x,z} \\ E_{y,x} & E_{y,y} & E_{y,z} \\ E_{z,x} & E_{z,y} & E_{z,z} \end{pmatrix}$$

Speziell für $\vec{p} \cdot \vec{\nabla} \vec{E} = \vec{F}$ gilt:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} E_{x,x} \cdot p_x + E_{x,y} \cdot p_y + E_{x,z} \cdot p_z \\ E_{y,x} \cdot p_x + E_{y,y} \cdot p_y + E_{y,z} \cdot p_z \\ E_{z,x} \cdot p_x + E_{z,y} \cdot p_y + E_{z,z} \cdot p_z \end{pmatrix}$$

D.h. nur Feldinhomogenitäten führen zu Kräften auf Punktdipole.

Potentielle Energie eines Punktdipols

$$W_{pot}(\vec{r}) = q \left(\varphi(\vec{r} + \frac{\vec{s}}{2}) - \varphi(\vec{r} - \frac{\vec{s}}{2}) \right) = 2q \left(\frac{1}{2} \vec{s} \cdot \underbrace{\vec{\nabla} \varphi}_{-\vec{E}(\vec{r})} + \mathcal{O}(s^3) \right)$$

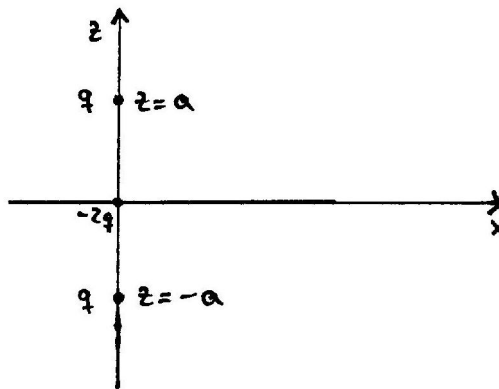
Für $s \rightarrow 0$ und $q \cdot s = p$ gilt:

$$W_{pot}(\vec{r}) = -\vec{p} \cdot \vec{E}(\vec{r})$$

Die potentielle Energie des Punktdipols hängt von Ort und Orientierung ab. Der Punktdipol erfährt ein Drehmoment:

$$\vec{M}(\vec{r}) = \vec{p} \times \vec{E}(\vec{r})$$

Beispiel: Quadrupol



Es handelt sich um einen reinen Quadrupol mit $Q = 0$, $\vec{p} = 0$, wie zum Beispiel das CO_2 -Molekül.

$$\rho(\vec{r}) = q\delta(x)\delta(y) \{ \delta(z - a) - 2\delta(z) + \delta(z + a) \}$$

$$Q_{\alpha\beta} = \int d^3\vec{r} \, \rho(\vec{r}) [3r_\alpha r_\beta - |\vec{r}|^2 \delta_{\alpha\beta}]$$

$$\Rightarrow Q_{\alpha\beta} = 0 \text{ für } \alpha \neq \beta$$

(wegen $\rho \propto \delta(x)\delta(y)$ ist x oder y immer 0)

$$\begin{aligned} \underline{\underline{Q_{xx}}} &= q \int d^3\vec{r} \, \delta(x)\delta(y) \{ \quad \} (3x^2 - x^2 - y^2 - z^2) \\ &= -q \int z^2 dz \{ \delta(z-a) - 2\delta(z) + \delta(z+a) \} \\ &= -q(a^2 + (-a)^2) \\ &= \underline{\underline{-2qa^2}} \end{aligned}$$

wegen der Symmetrie gilt:

$$\underline{\underline{Q_{yy}}} = Q_{xx} = \underline{\underline{-2qa^2}}$$

wegen $\sum_{\alpha=1}^3 Q_{\alpha\alpha} = 0$ folgt:

$$\underline{\underline{Q_{zz}}} = 4qa^3$$

Bemerkung:

Für die Ladungsverteilung mit Kugelsymmetrie gilt:

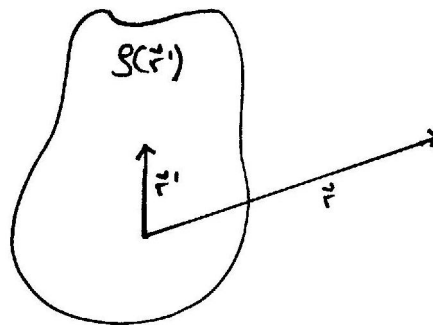
$$\vec{p} = \int d^3\vec{r}' \, \rho(\vec{r}') \vec{r}' = 0$$

$$Q_{\alpha\beta} = 0$$

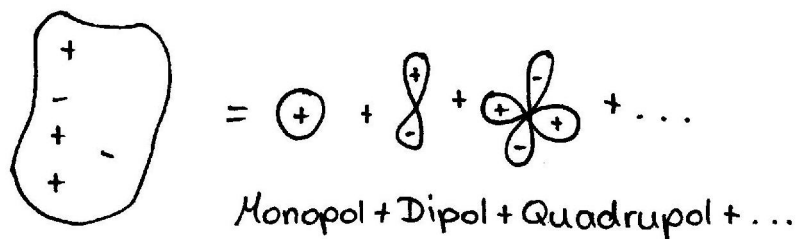
$\Rightarrow$ Quadrupolmoment als “Maß“ für die Abweichung einer Ladungsverteilung von der Kugelsymmetrie.

Zusammenfassung:

Wechselwirkung einer Probeladung mit der Ladungsverteilung:



$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{Q}{|\vec{r}|} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^3} + \frac{r_\alpha r_\beta Q_{\alpha\beta}}{2|\vec{r}|^5} + \dots \right\}$$



2.5 Energien und Kräfte bei Anwesenheit von Medien

Erinnerung 2.3

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r} \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Damit ist die Änderung der Energie bei Änderung der Ladungsdichte ρ um $\delta\rho$ gegeben durch:

$$\delta W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r} \int d^3\vec{r}' \frac{\delta\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \int d^3\vec{r} \delta\rho(\vec{r})\varphi(\vec{r})$$

(quellenmäßige Darstellung von $\varphi(\vec{r})$)

mit $\underbrace{\rho'}_{\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}} = \underbrace{\rho}_{\vec{\nabla} \cdot \vec{D}} + \underbrace{\rho''}_{-\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}$ (Erinnerung 1.5) folgt:

$$\begin{aligned}\delta W &= \epsilon_0 \int d^3\vec{r} \left(\vec{\nabla} \cdot \delta \vec{E}(\vec{r}) \right) \varphi(\vec{r}) + \int d^3\vec{r} \left(\vec{\nabla} \cdot \delta \vec{P}(\vec{r}) \right) \varphi(\vec{r}) \\ &= -\epsilon_0 \int d^3\vec{r} \delta \vec{E}(\vec{r}) \cdot \underbrace{\vec{\nabla} \varphi(\vec{r})}_{-\vec{E}} - \int d^3\vec{r} \delta \vec{P}(\vec{r}) \cdot \underbrace{\vec{\nabla} \varphi(\vec{r})}_{-\vec{E}}\end{aligned}$$

Das Überwälzen des Differentialoperators ist möglich, weil

$$\vec{E}(\vec{r}), \varphi(\vec{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \pm\infty} 0$$

damit ergibt sich:

$$\delta W = \int d^3\vec{r} \delta \rho(\vec{r}) \varphi(r) = \int d^3\vec{r} \delta \vec{D}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r})$$

als

$$\delta W = \underbrace{\epsilon_0 \int d^3\vec{r} \delta \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r})}_{(1)} + \underbrace{\int d^3\vec{r} \delta \vec{P}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r})}_{(2)}$$

wobei (1) die Energieänderung durch die Variation des Feldes beschreibt und (2) die Energieänderung durch die Polarisationsänderung („Spannen“ bzw. Orientierung der Dipole).

Speziell für die lineare Materialgleichung $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ gilt:

$$\begin{aligned}\delta W &= \int d^3\vec{r} \delta \left[\epsilon(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) \right] \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \int d^3\vec{r} \left\{ \delta \epsilon(\vec{r}) \vec{E}^2(\vec{r}) + \underbrace{\epsilon(\vec{r}) \delta \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r})}_{=} \right\} \\ &\quad \frac{1}{2} \epsilon(\vec{r}) \delta \vec{E}^2(\vec{r})\end{aligned}$$

Mit

$$\frac{1}{2} \epsilon(\vec{r}) \delta \vec{E}^2(\vec{r}) = \delta \left[\frac{1}{2} \epsilon(\vec{r}) \vec{E}^2(\vec{r}) \right] - \frac{1}{2} \delta \epsilon(\vec{r}) \vec{E}^2(\vec{r})$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}\delta W &= \int d^3\vec{r} \delta \left[\frac{1}{2} \underbrace{\epsilon(\vec{r}) \vec{E}^2(\vec{r})}_{=} \right] + \frac{1}{2} \int d^3\vec{r} \delta \epsilon(\vec{r}) \vec{E}^2(\vec{r}) \\ &\quad \vec{D}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r})\end{aligned}$$

Für δW ergibt sich somit:

$$\delta W = \delta \int d^3\vec{r} \frac{1}{2} \vec{D}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) + \frac{1}{2} \int d^3\vec{r} \delta\epsilon(\vec{r}) \vec{E}^2(\vec{r})$$

Für die Energiedichte des elektrostatischen Feldes bei vorgegebenen $\epsilon(\vec{r})$ (d.h. $\delta\epsilon(\vec{r}) = 0$) gilt:

$$\tilde{w}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \vec{D}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r})$$

Die Gesamtenergie des Systems, bestehend aus dem Feld und dem linearen Medium mit festen $\epsilon(\vec{r})$, ergibt sich aus:

$$\begin{aligned} \tilde{W} &= \int d^3\vec{r} \tilde{w} = \frac{1}{2} \int \vec{D}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) d^3\vec{r} = \frac{1}{2} \int d^3\vec{r} \rho(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) \\ \delta W &= \delta \tilde{W} + \underbrace{\frac{1}{2} \int d^3\vec{r} \delta\epsilon(\vec{r}) \vec{E}^2(\vec{r})}_{(1)} \end{aligned}$$

(1) entspricht der Arbeit, die verrichtet wird um die Materialeigenschaften zu ändern, d.h. die Dichte des Dipols zu variieren.

Früher(2.4): Die Dipole in (inhomogenen) elektrischen Feldern erfahren Kräfte $\Rightarrow$ wir erwarten Kräfte auf makroskopische Körper

Wir betrachten die Änderung der Systemenergie $\tilde{W}$ bei Änderung der dielektrischen Eigenschaften und unveränderlichem (sichtbaren) Feldquellen, d.h. $\delta\rho = 0 \Rightarrow \delta W = 0$

$$\delta \tilde{W} = -\frac{1}{2} \int d^3\vec{r} \delta\epsilon(\vec{r}) \vec{E}^2(\vec{r})$$

mit $\delta \tilde{W} = -\delta A = -F\delta s$, wobei $-F\delta s$ die dabei verrichtete Kraft durch Verrückung eines endlichen Körpers um δs ; dabei wird Kraft wirksam.

Offensichtlich gilt:

$\delta\epsilon > 0 \rightarrow$ Körper wird ins Feld hineingezogen

$\delta\epsilon < 0 \rightarrow$ Körper wird aus dem Feld herausgedrängt

2.6 Übergangsbedingungen an Grenzflächen

Leiter := $\exists$ verschiebbare Ladungen (Metalle, Elektrolyte,...)

Im Feld $\vec{E}$ gilt:

$$\Rightarrow \vec{F} = q\vec{E}$$

$\Rightarrow$ Ladungen bewegen sich bis die Kräfte im Gleichgewicht sind. $\Rightarrow \vec{E} = 0$ im Leiter

$\Rightarrow \varphi(\vec{r}) = \text{const.}$, d.h. Leiter sind Äquipotentialgebiet

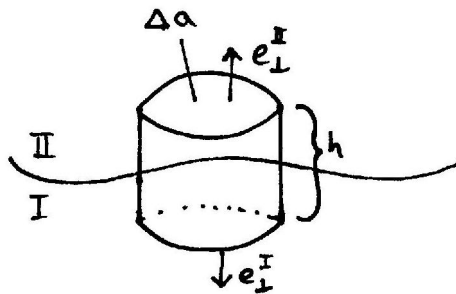
$$\int_{\text{im Leiter}} d\vec{a} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 0 \Rightarrow Q_{\text{eingeschlossen}} = 0$$

$\Rightarrow$ Ladungen wandern an die Oberfläche und nehmen dort 1-2 Atomlagen ein.

Ladungsverschiebung := Influenz

Die Leiteroberflächen werden oft durch die Flächenladungsdichte σ gekennzeichnet.

Wir betrachten jetzt die Grenzflächen zwischen 2 Medien. Dazu legen wir eine "Dose" in die Grenzfläche.



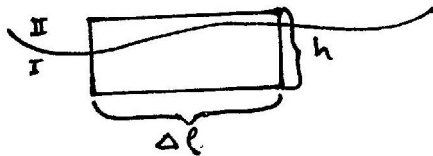
$$\int_{\Delta a} da (D_{\perp}^{II}(\vec{r}) - D_{\perp}^I(\vec{r})) + \underbrace{\int_{\text{Mantel}} d\vec{a} \cdot \vec{D}(\vec{r})}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0} = \Delta Q = \int_{\Delta a} da \sigma(\vec{r})$$

Mit $\sigma(\vec{r})$ als Flächenladungsdichte.

$$\sigma(\vec{r}) = D_{\perp}^{II}(\vec{r}) - D_{\perp}^I(\vec{r})$$

Die Normalkomponente des $\vec{D}$ -Feldes erleidet an der Grenzfläche einen Sprung, falls eine Flächenladungsdichte existiert.

Wir legen ein geschlossenes Rechteck in die Grenzfläche.



$$\int_{\text{Rechteck}} d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{d}{dt} \int_{\text{Rechteck}} d\vec{a} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0 \quad (\text{für Elektrostatik})$$

Mit

$$\int_{\text{Rechteck}} d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int dl (E_{||}^{II}(\vec{r}) - E_{||}^I(\vec{r}))$$

ergibt sich:

$$E_{||}^{II}(\vec{r}) = E_{||}^I(\vec{r})$$

Die Tangentialkomponente des E-Feldes geht an der Grenzfläche stetig über.

Beispiele:

- 2 ideale Isolatoren

seien lineare Medien:

$$\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon^I \vec{E}(\vec{r}) \text{ in } I$$

$$\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon^{II} \vec{E}(\vec{r}) \text{ in } II$$

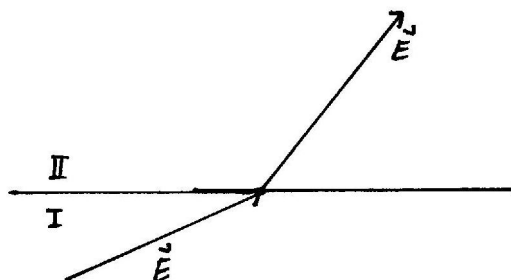
Für ideale Isolatoren gibt es keine Oberflächenladung, d.h. $\sigma = 0$.

$$\epsilon^{II} E_{\perp}^{II} - \epsilon^I E_{\perp}^I = 0$$

$$E_{||}^{II} - E_{||}^I = 0$$

d.h. die Tangentialkomponenten sind stetig. Die Normalkomponente springt:

$$\frac{E_{\perp}^{II}}{E_{\perp}^I} = \frac{\epsilon^I}{\epsilon^{II}}$$



Für das $\vec{D}$ -Feld gilt die umgekehrte Situation:

Die Normalkomponente ist stetig und die Tangentialkomponente springt.

$$\begin{aligned} E_{\parallel}^I &= E_{\parallel}^{II} \\ \frac{D_{\parallel}^I}{\epsilon^I} &= \frac{D_{\parallel}^{II}}{\epsilon^{II}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{D_{\parallel}^I}{D_{\parallel}^{II}} = \frac{\epsilon^I}{\epsilon^{II}}$$

- Grenzfläche idealer Leiter im Vakuum

$$\vec{D}^I(\vec{r}) = \epsilon_0 \vec{E}^I(\vec{r}) \text{ in } I \text{ (Vakuum)}$$

$$\vec{D}^{II}(\vec{r}) = \vec{E}^{II}(\vec{r}) = 0 \text{ in } II \text{ (Leiter)}$$

$$\sigma(\vec{r}) = D_{\perp}^{II}(\vec{r}) - D_{\perp}^I(\vec{r}) = 0 - \epsilon_0 E_{\perp}^I$$

$$\Rightarrow E_{\perp} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

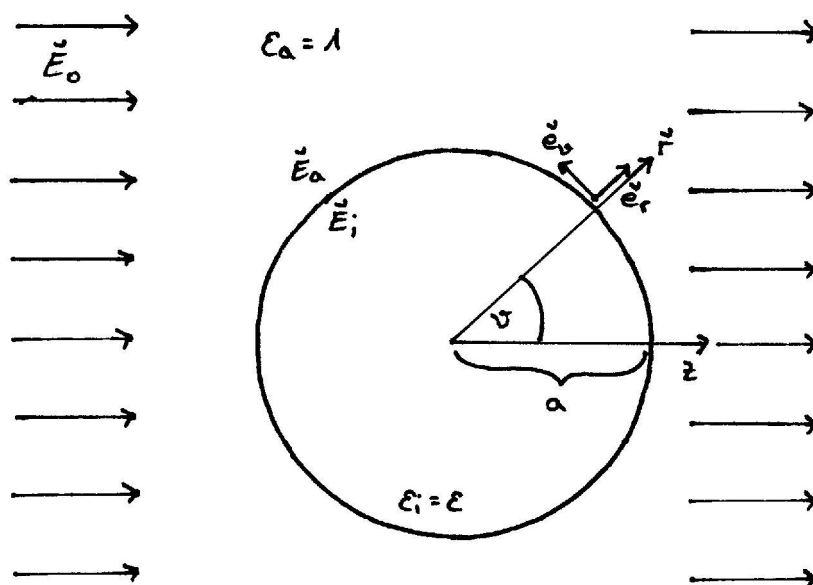
$$E_{\parallel}^I(\vec{r}) = \underbrace{E_{\parallel}^{II}(\vec{r})}_0 \Rightarrow E_{\parallel}^I(\vec{r}) = 0$$

d.h. das elektrische Feld auf Leiter hat nur Normalkomponente und keine Tangentialkomponenten.

Für das Potential mit $\frac{\partial}{\partial n}$ als Normalableitung bezüglich $\vec{e}_{\perp}$ gilt

$$\epsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \sigma$$

- dielektrische Kugel im homogenen Feld im Vakuum



für $r \rightarrow \infty$ gilt:

$$\vec{E} = E_0 \vec{e}_z$$

$$\varphi = -E_0 z$$

Es befinden sich keine freien Ladungen auf der Kugeloberfläche $\Rightarrow$ Normalkompo-

nente von $\vec{D}$ stetig, d.h.

$$D_r^i|_{r=a} = D_r^a|_{r=a}$$

$$-\epsilon \frac{\partial \varphi_i}{\partial r}|_{r=a} = -\frac{\partial \varphi_a}{\partial r}|_{r=a}$$

Ansatz mittels einem homogenen Feldes im Inneren ($\parallel E_0$):

$$\varphi_i = -E_i z$$

$$\varphi_a = -E_0 z + \frac{p_z \cos(\vartheta)}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

wobei $\frac{p_z \cos(\vartheta)}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ die Störung des Nahfeldes durch den Kugeldipol beschreibt.

Mit $z = r \cdot \cos(\vartheta)$ folgt:

$$-\epsilon \frac{\partial \varphi_i}{\partial r}|_{r=a} = -\frac{\partial \varphi_a}{\partial r}|_{r=a}$$

$$\epsilon E_i \cos(\vartheta) = E_0 \cos(\vartheta) + \frac{2p_z \cos(\vartheta)}{4\pi\epsilon_0 a^3}$$

$$\Rightarrow \epsilon E_i = E_0 + \frac{2p_z}{4\pi\epsilon_0 a^3} \quad (*)$$

Wir werten nun die Stetigkeit der Tangentialkomponente aus.

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \vartheta}|_{r=a} = \frac{\partial \varphi_a}{\partial \vartheta}|_{r=a}$$

$$\Rightarrow E_i = E_0 - \underbrace{\frac{p_z}{4\pi\epsilon_0 a^3}}_{(*)}$$

$$\Rightarrow E_i = E_0 - \frac{1}{2}(\epsilon E_i - E_0)$$

$$\Rightarrow E_i \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right) = E_0 \left(1 + \frac{1}{2}\right)$$

$$\vec{E}_i = \underbrace{\frac{3}{\epsilon + 2}}_{\leq 1} \vec{E}_0 \quad (**)$$

Das $\vec{E}$ -Feld ist in der Kugel geschwächt.

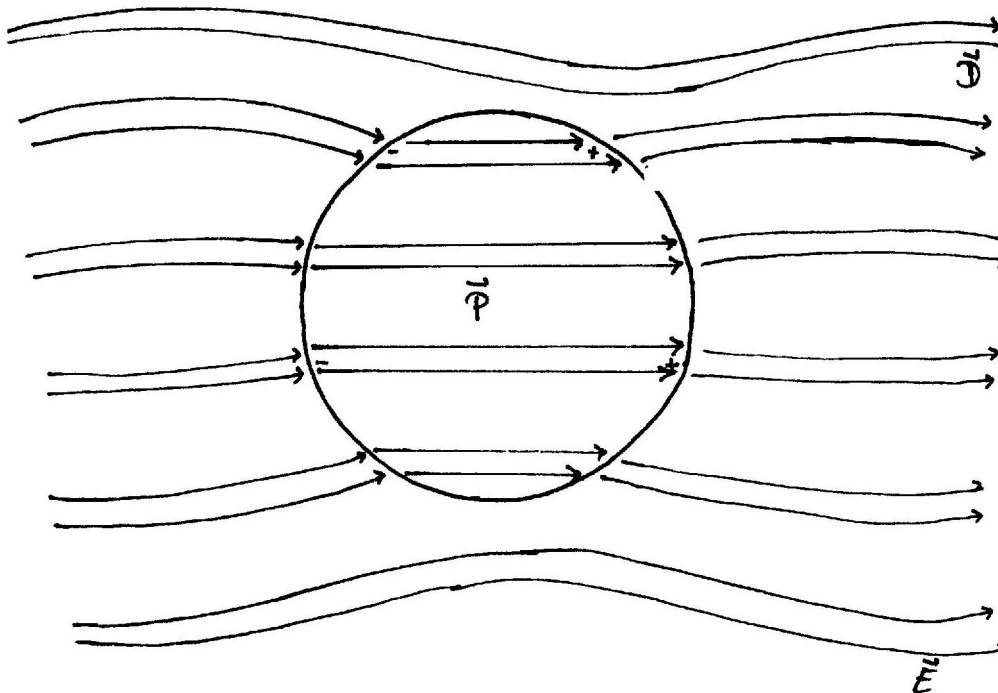
Die Polarisation, d.h. die Dipoldichte ist gegeben durch

$$\vec{P} = \frac{\vec{p}_z}{V} = \frac{\vec{p}_z}{\frac{4}{3}\pi a^3} \quad (*/*) \quad 3 \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \epsilon_0 \vec{E}_0$$

bzw.

$$\vec{E}_i = \vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

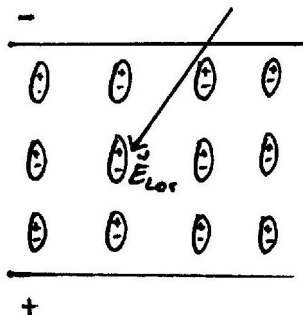
D.h. durch Polarisierung der Kugel findet eine “Entelektrisierung” statt.



Das $\vec{D}$ -Feld ist gebrochen. Das $\vec{E}$ -Feld ist gebrochen und geschwächt und $\vec{P}$ ist die Polarisierung in der Kugel.

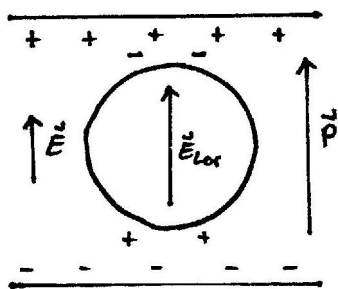
2.7 Clausius-Mossotti-Beziehung

Wir betrachten die Feldeinwirkung auf einzelne Dipole im Dielektrikum (lokales Feld). Im folgenden Bild wird die approximative Beschreibung durch das Dielektrikum mit kugelförmiger Vakuole verdeutlicht.



Offensichtlich haben wir hier die umgekehrte Situation, wie bei einer Kugel im Vakuum.
 Dort gilt

$$\vec{E}_i = \vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$



Jetzt verstärkt die Polarisation das Feld in der Hohlkugel.

$$\vec{E}_{loc} = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \quad \text{Lorentz - Relation}$$

Wir nehmen jetzt an, daß die Dipole durch Einwirkung des äußeren Feldes entstehen:

$$\vec{p} = \alpha \vec{E}_{loc}$$

wobei $\vec{p}$ das molekulare Dipolmoment und α die Polarisierbarkeit beschreibt, d.h.

$$\vec{p} = \alpha \left(\vec{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P} \right) \quad \text{mit} \quad \vec{P} = N \vec{p}$$

wobei N die Dichte der molekular Dipole beschreibt.

$$\begin{aligned} \Rightarrow N\vec{p} &= N\alpha(\vec{E} - \frac{1}{3\epsilon_0}\vec{P}) \\ \Rightarrow \epsilon_0(\epsilon - 1)E &= N\alpha(\vec{E} - \frac{1}{3\epsilon_0}\epsilon_0(\epsilon - 1)\vec{E}) \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Clausius-Mossotti-Relation

$$N\alpha = 3\epsilon_0 \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}$$

Bemerkung:

Diese approximative Relation zwischen makroskopischer Dielektrizitätskonstante und mikroskopischer Polarisierbarkeit gilt für Stoffe mit kleiner Polarisierbarkeit, z.B. Gase ($\epsilon \approx 1$) $\Rightarrow N\alpha \approx \epsilon_0(\epsilon - 1)$

2.8 Das Randwertproblem

2.8.1 Die Greenschen Sätze

Offensichtlich gilt

$$\vec{\nabla} \cdot \Psi(\vec{r})\vec{v}(\vec{r}) = \Psi(\vec{r})\vec{\nabla} \cdot \vec{v}(\vec{r}) + \vec{v}(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla}\Psi(\vec{r})$$

Wir wenden den Gaußschen Satz an:

$$\begin{aligned} \underbrace{\int_V d^3\vec{r} \vec{\nabla}\Psi(\vec{r})\vec{v}(\vec{r})}_{=} &= \int_{(V)} d\vec{a} \cdot \Psi(\vec{r})\vec{v}(\vec{r}) \\ &= \int_V d^3\vec{r} \left\{ \Psi(\vec{r})\vec{\nabla} \cdot \vec{v}(\vec{r}) + \vec{v}(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla}\Psi(\vec{r}) \right\} \end{aligned}$$

Speziell sei $\vec{v} = \vec{\nabla}\varphi$

$$\int_V d^3\vec{r} \left\{ \Psi(\vec{r}) \Delta \varphi(\vec{r}) + \left[\vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) \right] \cdot \left[\vec{\nabla} \Psi(\vec{r}) \right] \right\} = \int_{(V)} d\vec{a} \Psi(\vec{r}) \vec{\nabla} \varphi(\vec{r})$$

Erster Greenscher Satz

Wir vertauschen $\Psi \leftrightarrow \varphi$:

$$\int_V d^3\vec{r} \left\{ \varphi(\vec{r}) \Delta \Psi(\vec{r}) + \left[\vec{\nabla} \Psi(\vec{r}) \right] \cdot \left[\vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) \right] \right\} = \int_{(V)} d\vec{a} \varphi(\vec{r}) \vec{\nabla} \Psi(\vec{r})$$

und bilden die Differenz

$$\int_V d^3\vec{r} \left\{ \Psi(\vec{r}) \Delta \varphi(\vec{r}) - \varphi(\vec{r}) \Delta \Psi(\vec{r}) \right\} = \int_{(V)} d\vec{a} \cdot \left\{ \Psi(\vec{r}) \vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) - \varphi(\vec{r}) \vec{\nabla} \Psi(\vec{r}) \right\}$$

Zweiter Greenscher Satz

2.8.2 Eindeutigkeit der Lösung

Wir betrachten einen einfach zusammenhängenden Raumbereich V , in dem die Poisson-Gleichung gilt:

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

Die Lösung $\varphi(\vec{r})$ ist eindeutig im Fall von Dirichletschen oder Neumannschen Randbedingungen (in diesem Fall bis auf eine Konstante) oder für gemischte Randbedingungen.

- Dirichletsche Randbedingung: $\varphi(\vec{r})$ auf (V) gegeben
- Neumannsche Randbedingung: $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ (Normalenableitung) auf (V) gegeben

Beweis

Wir nehmen an, $\varphi_1(\vec{r})$ und $\varphi_2(\vec{r})$ seien Lösungen.

Für die Differenz $\Psi = \varphi_1 - \varphi_2$ muß gelten

$$\Delta\Psi = 0 \quad (*)$$

Mit den Dirichletschen bzw. Neumannschen Randbedingungen gilt:

$$\Psi = 0 \text{ (Dirichlet)} \quad (**)$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial n} = 0 \text{ (Neumann)} \quad (***)$$

Der erste Greensche Satz liefert:

$$\int_V d^3\vec{r} \left[\Psi \Delta\Psi + (\vec{\nabla}\Psi)^2 \right] = \int_{(V)} da \, \Psi \frac{\partial\Psi}{\partial n}$$

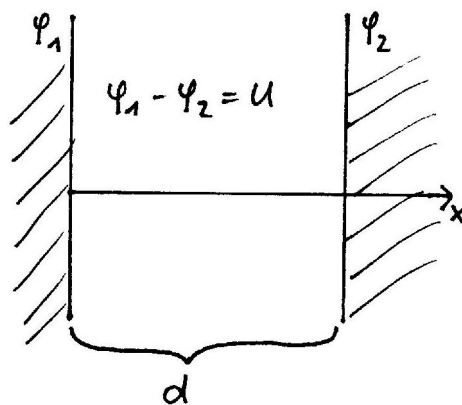
Wegen (*) und (**) bzw. (***) gilt:

$$\int_V d^3\vec{r} (\vec{\nabla}\Psi)^2 = 0$$

Daraus folgt:

- $\vec{\nabla}$ verschwindet in V
- $\Psi = \text{const.}$ (im Fall von (**) $\Psi = 0$)
- Bis auf eine (eventuelle) Konstante ist das Potential eindeutig bestimmt.
- $\vec{E} = -\nabla\varphi$ ist eindeutig bestimmt!

Beispiel: Plattenkondensator



Aus Symmetriegründen gilt:

$$\vec{E} = (E, 0, 0)$$

d.h. $\varphi = \varphi(x)$.

Da es keine Raumladungen gibt, vereinfacht sich das Poissonproblem

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

zu

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0$$

Für die allgemeine Lösung gilt

$$\varphi(x) = ax + b$$

Wir berücksichtigen die Randbedingungen

$$\begin{aligned} \varphi(0) = \varphi_1 &\Rightarrow b = \varphi_1 \\ \varphi(x = d) = \varphi_2 &\Rightarrow ad + \varphi_1 = \varphi_2 \Rightarrow a = -\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d} = -\frac{U}{d} \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\Rightarrow \varphi(x) &= -\frac{U}{d}x + \varphi_1 \\ \Rightarrow E &= -\frac{d\varphi}{dx} = \frac{U}{d}\end{aligned}$$

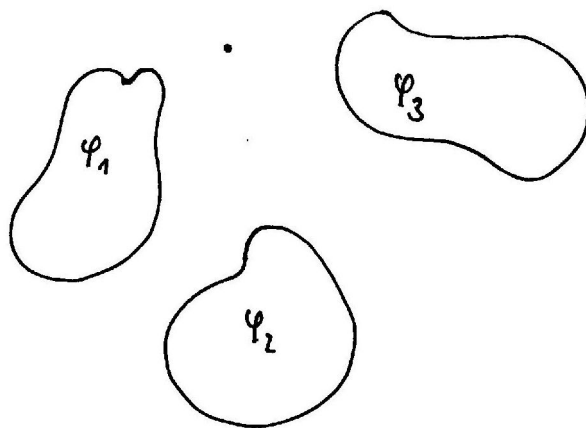
Bemerkung:

Im allgemeinen Fall sind die Randbedingungen nicht frei wählbar. Diese stellen sich in Abhängigkeit von der Raumladungsdichte $\rho(\vec{r})$ ein.

Das wird aus der Maxwellgleichung klar:

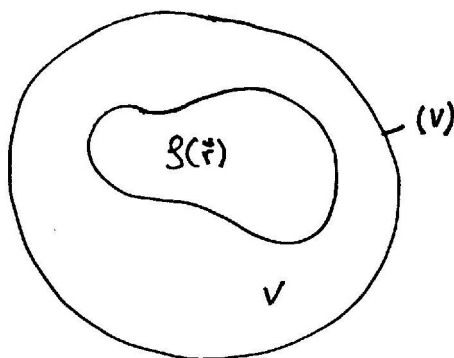
$$-\int_{(V)} d\vec{a} \cdot \vec{E} = \int_{(V)} da \frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{1}{\epsilon_0} Q$$

d.h. nicht alle $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ werden es erlauben, die Maxwellgleichung zu erfüllen. Metallische Leiter bilden hier eine Ausnahme. Deren Potential kann von außen eingestellt werden.



2.8.3 Schein- und Influenzladungen

Wir betrachten ein Volumen V welches die Ladung ρ enthält.



Wir suchen das Potential in V . Es gilt:

$$\Delta\varphi(r) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(r)$$

Die spezielle Lösung ist gegeben durch eine quellenmäßige Darstellung:

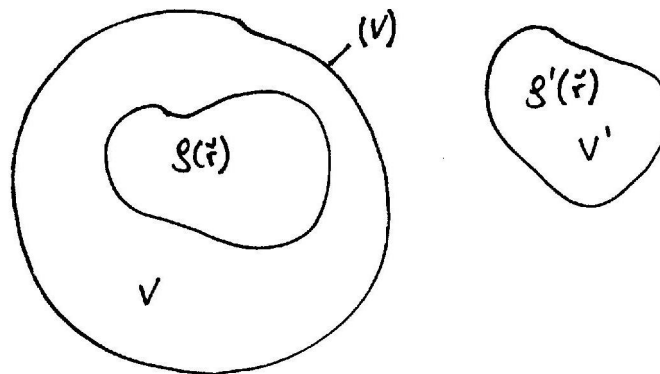
$$\varphi_p(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Diese Lösung wird im allgemeinen nicht die Randbedingungen auf (V) erfüllen.

$\Rightarrow$ Wir addieren eine geeignete Lösung $\varphi_0(\vec{r})$ der Laplace-Gleichung.

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi_p(\vec{r}) + \varphi_0(\vec{r})$$

Oft ist es zielführend φ_0 so zu konstruieren, daß wir außerhalb von V eine fiktive Raumladungsdichte $\rho'(\vec{r})$ installieren.



Das Poisson-Integral von ρ' ist gegeben durch:

$$\varphi'_p(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Für $\vec{r} \in V$ gilt:

$$\rho'(r) = 0$$

$\Rightarrow \varphi'_p$ genügt in V einer Laplace-Gleichung

$$\Delta\varphi'_p(\vec{r}) = 0 \quad \text{für } \vec{r} \in V$$

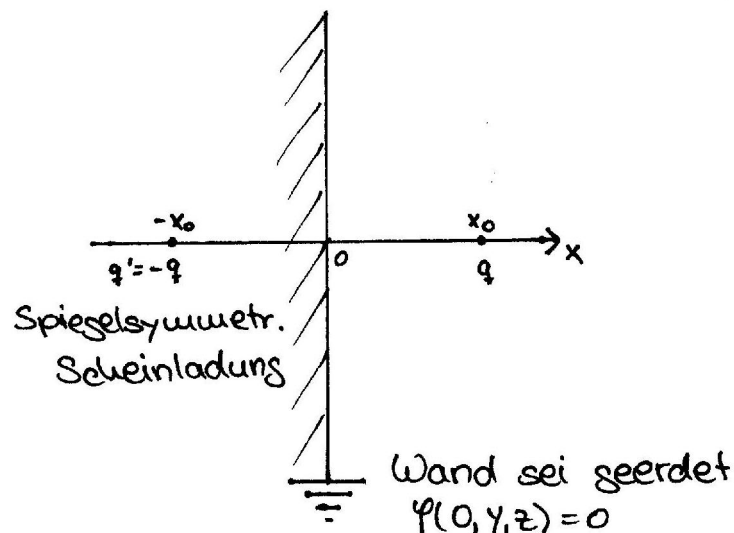
$\Rightarrow \varphi'_p$ kann ein geeignetes $\varphi_0(\vec{r})$ sein, d.h.

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int_V d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \int_{V'} d^3\vec{r}' \frac{\rho'(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right\}$$

Dabei ist $\rho'(\vec{r})$ völlig beliebig. Die Kunst besteht darin, $\rho'(\vec{r})$ so zu wählen, daß die Randbedingungen auf (V) erfüllt sind.

$\rho'(r)$ wird als Scheinladungsdichte bezeichnet.

Beispiel: Punktladung vor leitender Wand



$$\varphi_p(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \quad \text{mit } \vec{r}_0 = (x_0, 0, 0)$$

Das Coulombpotential der Punktladung erfüllt nicht die Randbedingung, da $\varphi_p(0, y, z) \neq 0$.

Jetzt installieren wir eine spiegelsymmetrische Scheinladung $q' = -q$ bei $-\vec{r}_0 = (-x_0, 0, 0)$

$$\Rightarrow \varphi'_p(\vec{r}) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} + \vec{r}_0|}$$

Damit ergibt sich:

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi_p(\vec{r}) + \varphi'_p(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} - \frac{1}{|\vec{r} + \vec{r}_0|} \right)$$

Im uns interessierenden Volumen von der Wand erfüllt $\varphi(r)$

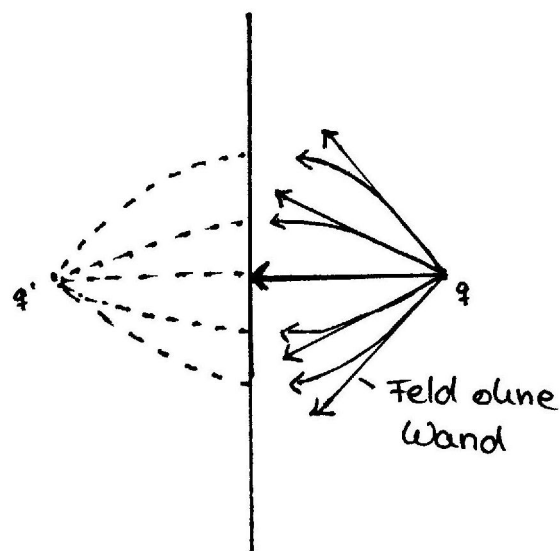
$$\Delta\varphi(r) = -\frac{1}{\epsilon_0} q \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

und die Randbedingung $\varphi(0, y, z) = 0$.

$\Rightarrow$ Problem gelöst!

Bemerkung:

- Das $\vec{E}$ -Feld ist leicht auszurechnen.



- Spiegelsymmetrisch positionierte Scheinladungen werden oft als Spiegelladungen bezeichnet.
- Scheinladungen sind fiktiv, aber die Flächenladungsdichten sind real.

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}|_{x=0} = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{x_0}{\left(\sqrt{x_0^2 + y^2 + z^2}\right)^3} \quad \text{für } x > 0$$

$$E_x = 0 \quad \text{für } x < 0 \quad (\text{inneres von Leitern ist feldfrei})$$

$$E_{y,z} = 0$$

$\Rightarrow$ Die Normalkomponente des elektrischen Feldes springt.

⇒ Gibt Flächenladungsdichte auf der Wand

$$\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{x_0}{\left(\sqrt{x_0^2 + y^2 + z^2}\right)^3}$$

Wir integrieren über die ganze Fläche:

$$Q = \int dy \int dz \sigma(y, z) = -\frac{qx_0}{2\pi} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \underbrace{\int_0^\infty \frac{r dr}{\left(\sqrt{x_0^2 + r^2}\right)^3}}_{\frac{1}{x_0}} = -q$$

D.h. es existiert eine zur Punktladung entgegengesetzte und betragsmäßig gleichgroße Ladung auf der Oberfläche der Wand.

Ladungen dieser werden “Influenzladungen“ genannt. Der Effekt heißt “Influenz“. Dieser Effekt ist real meßbar, wenn eine Ladung vor eine geerdete Metallplatte gebracht wird: ⇒ Ladung wird induziert; wir unterbrechen die Erdverbindung
 ⇒ Influenzladung bleibt auf der Platte

2.8.4 Methode der Greenschen Funktion

In Kapitel 2.2 wurde die Greenfunktion der Poisson-Gleichung eingeführt über

$$\Delta_{\vec{r}} G_0(\vec{r}, \vec{r}') = \Delta_{\vec{r}'} G_0(\vec{r}, \vec{r}') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

Um spezielle Randbedingungen erfüllen zu können, addieren wir die Lösungen der Laplace-Gleichung und definieren

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = G_0(\vec{r}, \vec{r}') + F(\vec{r}, \vec{r}') \quad \text{mit} \quad \Delta_{\vec{r}} F(\vec{r}, \vec{r}') = 0$$

Wir wenden den zweiten Greenschen Satz auf die Greenfunktion und das Potential an.

$$\int_V d^3\vec{r}' \left[G(\vec{r}, \vec{r}') \underbrace{\Delta_{\vec{r}'} \varphi(\vec{r}')}_{-\frac{\rho(\vec{r}')}{\epsilon_0}} - \varphi(\vec{r}') \underbrace{\Delta_{\vec{r}'} G(\vec{r}, \vec{r}')}_{-\delta(\vec{r}, \vec{r}')} \right] = \int_{(V)} d\vec{a}' \left\{ G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial \varphi(\vec{r}')}{\partial n'} - \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} \varphi(\vec{r}') \right\}$$

damit ergibt sich

$$-\frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3\vec{r} \left\{ G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') - \epsilon_0 \delta(\vec{r}, \vec{r}') \varphi(\vec{r}') \right\} = \int_{(V)} d\vec{a}' \{ \dots \}$$

$$\Rightarrow \varphi(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3\vec{r}' G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') + \int_{(V)} d\vec{a}' \left\{ G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial \varphi(\vec{r}')}{\partial n'} - \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} \varphi(\vec{r}') \right\}$$

D.h. falls die Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ und die Randbedingungen bekannt sind, können wir das Potential angeben, vorausgesetzt wir kennen $G(\vec{r}, \vec{r}')$.

Die Bestimmung von $G(\vec{r}, \vec{r}')$ ist einfacher, da die Greenfunktion nur von der Geometrie und nicht von der Ladungsverteilung abhängt.

Wir spezifizieren die Randbedingung für die Greenfunktion:

- Dirichlet-Randbedingung: $\varphi(\vec{r})$ für $\vec{r} \in (V)$ gegeben

$\Rightarrow$ Wir fordern $G(\vec{r}, \vec{r}') = 0$ für $\vec{r}' \in (V)$

$\Rightarrow$ Das Potential ist gegeben durch

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3\vec{r}' G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') - \int_{(V)} d\vec{a}' \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} \varphi(\vec{r}')$$

D.h. wir müssen jetzt das Randwertproblem für $G(\vec{r}, \vec{r}') = G_0(\vec{r}, \vec{r}') + F(\vec{r}, \vec{r}')$ lösen mit $G_0(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|}$ und $\Delta_{\vec{r}'} F(\vec{r}, \vec{r}') = 0$ und $G(\vec{r}, \vec{r}') = 0$ für $\vec{r}' \in (V)$

Das ist das Problem der Berechnung des Potentials einer Einheitsladung am Ort $\vec{r}$ bei geerdeter Oberfläche. Dies kann zum Beispiel über Spiegelladungen gelöst werden. Wir können mit diesem $G(\vec{r}, \vec{r}')$ dann $\varphi(\vec{r})$ für beliebige $\rho(\vec{r})$ und Randbedingungen $\varphi(\vec{r}')$ für $\vec{r}' \in (V)$ angeben!

- Neumann-Randbedingung:

Es ist die Normalenableitung $\frac{\partial \varphi(\vec{r})}{\partial n}$ für $\vec{r} \in (V)$ gegeben.

Idealerweise würde man $\frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} = 0$ für $\vec{r}' \in (V)$ fordern. Dies ist aber leider nicht möglich, da

$$\int_{(V)} d\vec{a}' \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} = \int_V d^3\vec{r}' \Delta_{\vec{r}'} G(\vec{r}, \vec{r}') = - \int_V d^3\vec{r}' \delta(\vec{r} - \vec{r}') = -1$$

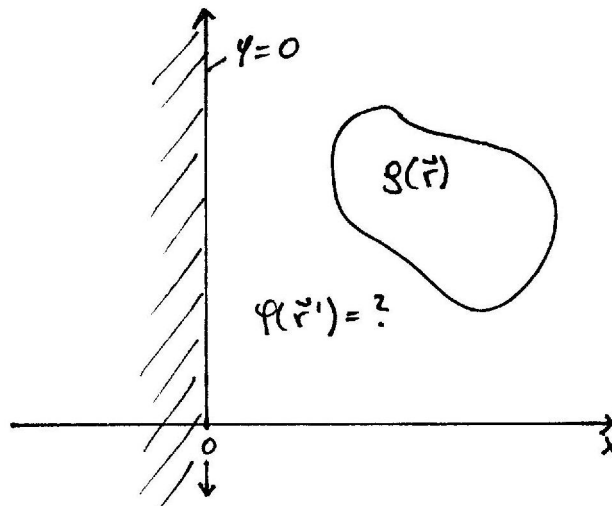
Wir können aber die Normierung $\frac{\partial G}{\partial n'}(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{a}$, mit a als Flächeninhalt der Randfläche, fordern. Damit ergibt sich das Potential zu

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3\vec{r}' G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') + \underbrace{\int_{(V)} da' G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial \varphi(\vec{r}')}{\partial n'}}_{\bar{\varphi}} + \frac{1}{a} \int_{(V)} da' \varphi(\vec{r}')$$

wobei $\bar{\varphi}$ der Mittelwert des Potentials auf der Randfläche ist.

Beispiel:

Beliebige Ladungsverteilung von geerdeter, leitender Wand (∞ ausgedehnt)



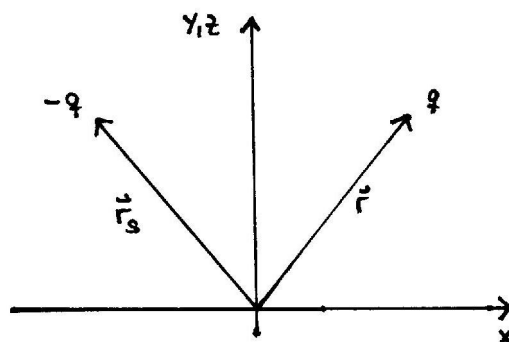
d.h. Dirichletproblem mit $\varphi(\vec{r}') = 0$ für $\vec{r}' \in (V)$

$$\Rightarrow \varphi(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3\vec{r}' G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}')$$

$G(\vec{r}, \vec{r}')$ erfüllt:

$$\Delta_{\vec{r}} G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \text{mit } G(\vec{r}, \vec{r}') = 0 \quad \text{für } \vec{r}' \in (V)$$

Das ist analog zum Problem für die Punktladung q vor einer leitenden Wand. Dies ist bereits gelöst mit der Methode der Spiegelladung:



wobei $\vec{r}_s = (-x, y, z)$

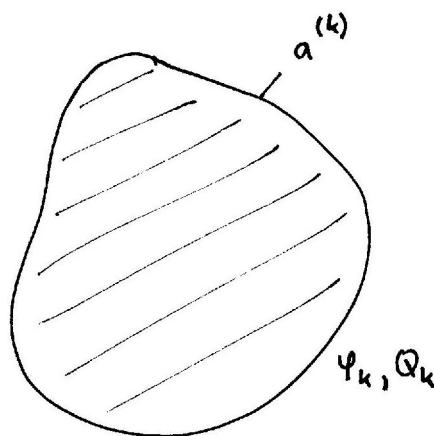
mit $\frac{q}{\epsilon_0} \rightarrow 1$ folgt für G:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{1}{|\vec{r}' - \vec{r}|} - \frac{1}{|\vec{r}' - \vec{r}_s|} \right\}$$

$\Rightarrow \varphi(\vec{r})$ ist berechenbar aus $\rho(\vec{r})$.

2.8.5 Kapazitätskoeffizienten

Wir betrachten einen Leiter mit dem Potential φ_k , welcher die Ladung Q_k trägt. Er sei eingebettet in ein Volumen V .



$$\varphi(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3\vec{r}' G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') - \int_{(V)} da' \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n} \varphi(\vec{r}')$$

Das Volumen um den Körper sei leiterfrei und enthält somit keine Ladungen $\Rightarrow \rho(\vec{r}') = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \varphi(\vec{r}) &= - \int_{a^{(k)}} \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} \varphi(\vec{r}') da' \\ &= -\varphi_k \int_{a^{(k)}} da' \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} \quad (*) \end{aligned}$$

Für die Flächenladungsdichte auf dem Leiter gilt:

$$\sigma(\vec{r})|_{a^{(k)}} = \epsilon_0 \frac{\partial \varphi(\vec{r})}{\partial n} \Big|_{a^{(k)}}$$

Die Integration über die Leiteroberfläche liefert:

$$Q_k = \epsilon_0 \int_{a^{(k)}} da \frac{\partial \varphi(r)}{\partial n}$$

Mit (*) folgt:

$$Q_k = -\varphi_k \epsilon_0 \underbrace{\int_{a^{(k)}} da \frac{\partial}{\partial n} \int_{a^{(k)}} da' \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'}}_{-C_k}$$

wobei C_k die Kapazität des Leiters angibt. Diese hängt nur von der Geometrie ab, da $\vec{G}(\vec{r}, \vec{r}')$ nur von der Geometrie abhängt.

Daraus ergibt sich folgender linearer Zusammenhang:

$$Q_k = C_k \cdot \varphi_k$$

Wir betrachten nun mehrere Körper im leeren Raum und verallgemeinern (*) zu:

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_k \varphi_k \int_{a^{(k)}} da' \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'}$$

Damit folgt für

$$Q_k = \epsilon_0 \int_{a^{(k)}} da \frac{\partial}{\partial n} \sum_{k'} -\varphi_{k'} \int_{a^{(k')}} da' \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'}$$

d.h.

$$Q_k = \sum_{k'} C_{kk'} \cdot \varphi_{k'} \quad (**)$$

Mit dem symmetrischen, geometrieabhängigen Kapazitätskoeffizienten ergibt sich:

$$C_{kk'} = -\epsilon_0 \int_{a^{(k)}} da \int_{a^{(k')}} da' \frac{\partial^2 G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n \partial n'}$$

Wir können nun aus (**) für gegebene Ladungen Q_k die Potentiale φ_k der einzelnen Leiter berechnen.

Wir berechnen die Feldenergie für eine Leiteranordnung.

Früher (siehe Kapitel 2.3):

$$\begin{aligned} W_{el} &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_V d^3\vec{r} \vec{E}^2(\vec{r}) \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_V d^3\vec{r} \left[\vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) \right]^2 \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_V d^3\vec{r} \left[\vec{\nabla} \cdot \varphi(\vec{r}) \vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) - \varphi(\vec{r}) \Delta \varphi(\vec{r}) \right] \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \underbrace{\int_{(V)} d\vec{a} \varphi(\vec{r}) \vec{\nabla} \varphi(\vec{r})}_{(1)} - \frac{\epsilon_0}{2} \underbrace{\int_V d^3\vec{r} \varphi(\vec{r}) \underbrace{\Delta \varphi(\vec{r})}_{\rho(\vec{r})}}_{(2)} \end{aligned}$$

Für (1) gilt:

$$\int_{(V)} d\vec{a} \varphi(\vec{r}) \vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) = \sum_k \varphi_k \int_{a^{(k)}} \frac{\partial \varphi(\vec{r})}{\partial n} = \sum_k \varphi_k \frac{Q_k}{\epsilon_0}$$

Für (2) gilt, falls $\rho = 0$ ist:

$$\frac{\epsilon_0}{2} \int_V d^3\vec{r} \varphi(\vec{r}) \rho(\vec{r}) = 0$$

Daraus folgt:

$$\Rightarrow W_{el} = \frac{1}{2} \sum_k \varphi_k Q_k$$

mit $Q_k = \sum_{k'} C_{kk'} \varphi_{k'}$ folgt:

$$W_{el} = \frac{1}{2} \sum_{k,k'} C_{kk'} \varphi_k \varphi_{k'}$$

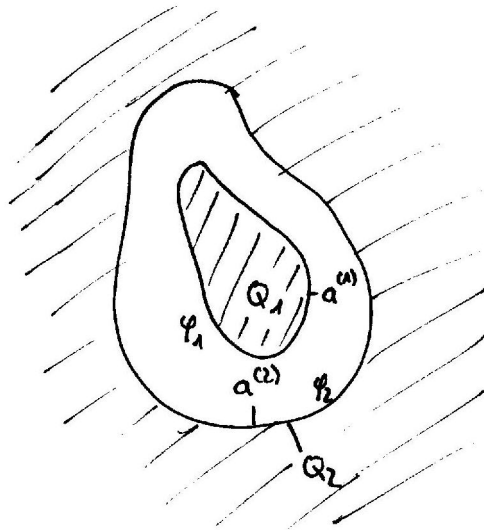
d.h., daß die elektrische Feldenergie eine quadratische Form in den Potentialen ist. Ist

W_{el} als Funktion der Potentiale bekannt, so lassen sich die Kapazitätskoeffizienten bestimmen aus:

$$C_{kk'} = \frac{\partial^2 W_{el}}{\partial \varphi_k \partial \varphi_{k'}}$$

Kapazitäten von Leitersystemen

Nun betrachten wir 2 Leiter, wobei der eine vom anderen umschlossen ist.



Q_2 ist hierbei durch die Ladung Q_1 auf dem inneren Leiter induziert. Im Hohlraum zwischen den Leitern befindet sich keine Ladung.

$$\Rightarrow 0 = Q = \int_{a^{(1)}+a^{(2)}} d\vec{a} \cdot \vec{D} = \underbrace{\epsilon_0 \int_{a^{(1)}} da \frac{\partial \varphi}{\partial n}}_{Q_1} + \underbrace{\epsilon_0 \int_{a^{(2)}} da \frac{\partial \varphi}{\partial n}}_{Q_2}$$

D.h. auf der Oberfläche des Außenleiters sitzt gerade die Ladung Q_2 , die die Ladung Q_1 kompensiert: $Q_2 = -Q_1$

Mit

$$Q_1 = -Q_2 = -\epsilon_0 \int_{a^{(2)}} da \frac{\partial \varphi}{\partial n}$$

und

$$\varphi = - \sum_k \varphi_k \int_{a^{(k)}} da' \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'}$$

folgt:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \epsilon_0 \int_{a^{(2)}} da \frac{\partial}{\partial n} \left\{ \varphi_1 \int_{a^{(1)}} da' \frac{\partial G}{\partial n'} + \varphi_2 \int_{a^{(2)}} da' \frac{\partial G}{\partial n'} \right\} \\ &= -C_{21}\varphi_1 - C_{22}\varphi_2 \end{aligned}$$

Andererseits gilt nach Definition:

$$Q_1 = C_{11}\varphi_1 + C_{12}\varphi_2$$

$$Q_2 = C_{21}\varphi_1 + C_{22}\varphi_2$$

d.h. es muß gelten:

$$C_{11} = -C_{21}$$

$$C_{12} = -C_{22}$$

Aus Symmetriegründen gilt:

$$C_{12} = C_{21}$$

Damit ergibt sich:

$$Q_1 = C_{11}(\varphi_1 - \varphi_2)$$

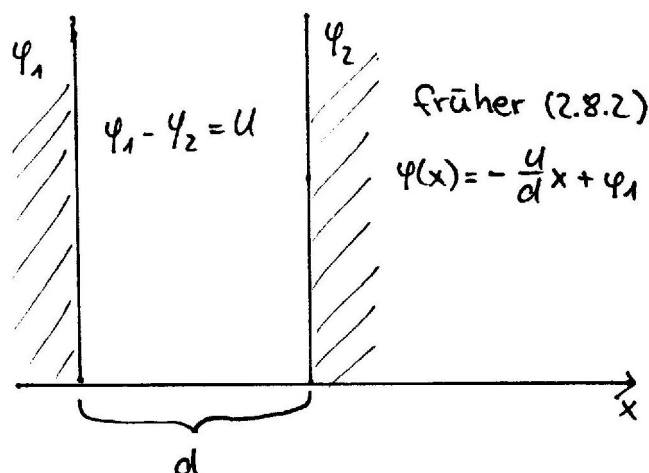
$$Q_2 = C_{22}(\varphi_2 - \varphi_1)$$

D.h. wir können nur die Potentialdifferenz $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ bestimmen.

⇒ Wir definieren die Kapazität einer Leiteranordnung über das Verhältnis der Ladung auf einem Leiter zur Potentialdifferenz zwischen den Leitern:

$$C := \frac{Q}{\Delta\varphi}$$

Beispiel: Plattenkondensator



Für die Flächenladungsdichte auf der linken Platte gilt:

$$\sigma_1 = -\epsilon_0 \frac{d\varphi}{dx} \Big|_{x=0} = \epsilon \frac{U}{d}$$

Damit ergibt sich die Gesamtladung auf dieser Platte zu:

$$Q \equiv Q_1 = \sigma_1 \cdot a = \epsilon_0 \frac{U}{d} a$$

wobei a die Fläche der Platte ist. Damit folgt für die Kapazität:

$$C = \frac{Q}{\Delta\varphi} = \epsilon_0 \frac{U}{d} \cdot a \cdot U^{-1} = \epsilon_0 \frac{a}{d} \quad (*)$$

Für die elektrische Feldenergiedichte gilt (vgl. 2.3):

$$w_{el} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2$$

Mit $E = -\frac{d\varphi}{dx} = \frac{U}{d}$ folgt:

$$w_{el} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{U^2}{d^2}$$

D.h. die Feldenergie im Volumen $V = a \cdot d$ ergibt sich zu:

$$W_{el} = w_{el} \cdot a \cdot d = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{a}{d} U^2 \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2} C U^2$$

Bemerkung:

Vorhin

$$C_{kk'} = \frac{\partial^2 W_{el}}{\partial \varphi_k \partial \varphi_{k'}} \rightarrow C = C_{11} = \frac{d^2 W_{el}}{dU^2}$$

Diese stimmen überein!

3 Magnetostatik

Der magnetische Teil der Maxwellgleichungen für den stat. Fall lautet:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}) &= \vec{j}(\vec{r}) \quad (\text{mit } \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}) = -\dot{\rho} = 0)\end{aligned}$$

mit der Materialgleichung:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}(\vec{r}) \quad (\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am})$$

3.1 Vektorpotential

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0 &\Rightarrow \exists \text{ Vektorpotential } \vec{A} \text{ mit } \vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) \\ \Rightarrow \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r})}_{\vec{j}(\vec{r})} &= \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})) = \frac{1}{\mu_0} \left\{ \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) - \Delta \vec{A}(\vec{r}) \right\}\end{aligned}$$

Die Definition des Vektorpotentials ist nicht eindeutig. Wir betrachten:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}'(\vec{r}) + \vec{\nabla} \chi(\vec{r})$$

wobei $\chi(\vec{r})$ ein skalares Feld beschreibt.

$$\vec{\nabla} \times \vec{A}'(\vec{r}) = \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})}_{\vec{B}(\vec{r})} + \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \chi(\vec{r})}_0$$

d.h. $\vec{A}(\vec{r})$ und $\vec{A}'(\vec{r})$ liefern das gleiche $\vec{B}$ -Feld. Wir nutzen diesen Freiheitsgrad und fordern:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = 0 \quad \text{Coulomb - Eichung}$$

Ist diese Eichbedingung immer erfüllbar?

$\vec{A}(\vec{r})$ erfülle nicht die Coulomb-Eichung, aber liefert ein korrektes $\vec{B}$ -Feld.

Immer möglich ist:

$$\begin{aligned}\vec{A}'(\vec{r}) &= \vec{A}(\vec{r}) + \vec{\nabla}\chi(\vec{r}) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{A}'(\vec{r}) &= \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) + \Delta\chi(\vec{r})\end{aligned}$$

Wir wählen $\chi(\vec{r})$ so, daß $\Delta\chi(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r})$ gilt. Dies geht immer, z.B. in Form des Poisson-Integrals.

$\Rightarrow \vec{A}'(\vec{r})$ erfüllt die Eichbedingung.

Vorhin:

$$\mu_0 \vec{j}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r})}_{=0 \text{ Coulomb-Eichung}} - \Delta \vec{A}(\vec{r})$$

$$\Delta \vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{j}(\vec{r})$$

d.h. jede der kartesischen Komponenten von $\vec{A}$ genügt einer Poisson-Gleichung. Die Lösung ist bekannt aus der Elektrostatik (Poisson-Integral)

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}) &= \mu_0 \int d^3\vec{r}' G_0(\vec{r} - \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') \\ &\quad \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\end{aligned}$$

Genügt $\vec{A}(\vec{r})$ in dieser Darstellung der Coulomb-Eichung?

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \mu_0 \int d^3\vec{r}' \vec{\nabla}_r \cdot G_0(\vec{r} - \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}')$$

wegen $\vec{\nabla}_r G_0 = -\vec{\nabla}_{r'} G_0$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) &= -\mu_0 \int d^3\vec{r}' \vec{\nabla}_{r'} \cdot G_0(\vec{r} - \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') \quad \text{mit } \vec{\nabla}_{\vec{j}} = 0 \\ &= -\mu_0 \int d\vec{a}' \cdot G_0(\vec{r} - \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}')\end{aligned}$$

Für inselförmige Stromverteilungen gilt:

$$-\mu_0 \int d\vec{a}' \cdot G_0(\vec{r} - \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') \xrightarrow{(V) \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

Mit $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})$ folgt für das Magnetfeld einer beliebigen inselförmigen Stromverteilung $\vec{j}(\vec{r})$:

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \mu_0 \int d^3\vec{r}' \vec{\nabla}_r \times G_0(\vec{r} - \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') \\ &= -\mu_0 \int d^3\vec{r}' \vec{j}(\vec{r}') \times \vec{\nabla}_r G_0(\vec{r} - \vec{r}') \end{aligned}$$

mit

$$G_0(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|}$$

folgt

$$\vec{\nabla}_r G_0(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla}_{r'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

und damit folgt:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{H}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Bemerkung:

Analogon zu

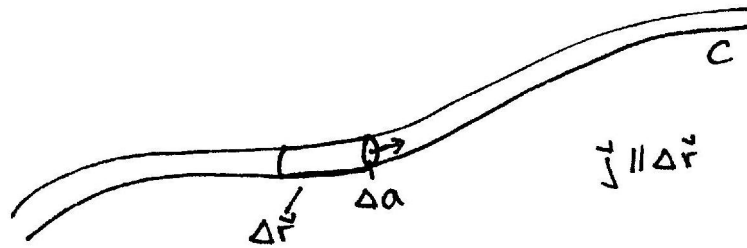
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

d.h. der quellenmäßigen Darstellung des $\vec{E}$ -Feldes.

Einfachster Quelltyp in der Elektrostatik $\rightarrow$ Punktladung

Einfachster Quelltyp in der Magnetostatik $\rightarrow$ Stromfaden

d.h. konstanter Strom entlang einer Raumkurve C .



Für kleine Querschnitte Δa und kleines $\Delta \vec{r}$ gilt:

$$I = |\vec{j}(\vec{r})| \Delta a$$

d.h.

$$I \Delta \vec{r} = \vec{j}(\vec{r}) \Delta V$$

d.h. unter dem Integral gilt:

$$\int_V \vec{j}(\vec{r}) d^3 \vec{r} \rightarrow \int_C I d\vec{r}$$

d.h. speziell für das Vektorpotential vom Stromfaden gilt:

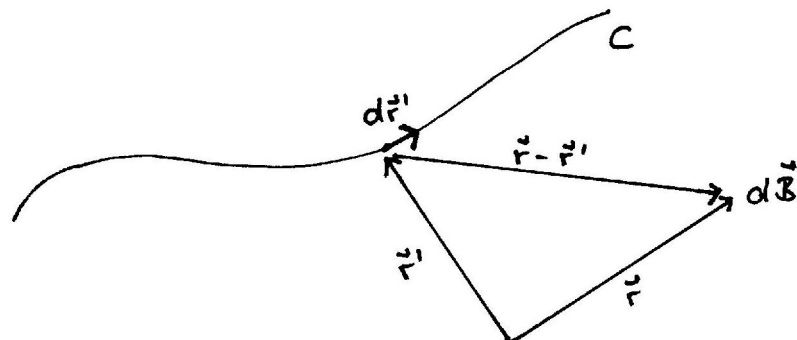
$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 \vec{r}' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

und

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 \vec{r}' \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

wird zum Biot-Savart-Gesetz:

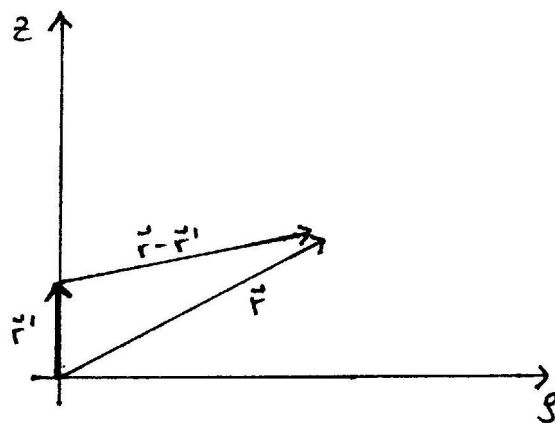
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_C \frac{d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$



Das Stromfadenelement $I d\vec{r}'$ liefert zum Magnetfeld folgenden Beitrag

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Beispiel: ∞ langer Stromfaden



wobei der Strom entlang z fließt.

Die Rechnung wird in Zylinderkoordinaten durchgeführt.

$$\vec{r} - \vec{r}' = (z - z')\vec{e}_z + \rho\vec{e}_\rho$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^2 = (z - z')^2 + \rho^2$$

$$d\vec{r}' = dz'\vec{e}_z$$

$$d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}') = \rho \, dz' \, \vec{e}_\varphi$$

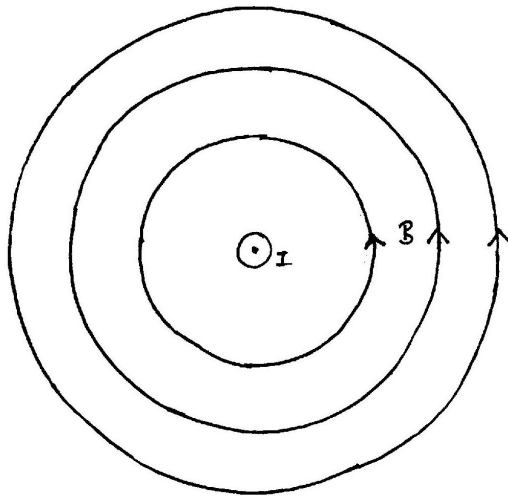
Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_C \frac{d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\ &= \frac{\mu_0 I \rho}{4\pi} \vec{e}_\varphi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{((z - z')^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\mu_0 I \rho}{4\pi} \vec{e}_\varphi \frac{1}{\rho^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{\left(\left(\frac{z-z'}{\rho}\right)^2 + 1\right)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

mit $x = \frac{z-z'}{\rho}$ ergibt sich:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I \vec{e}_\varphi}{4\pi \rho} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \vec{e}_\varphi$$

d.h. das $\vec{B}$ -Feld verläuft entlang konzentrischer Kreise um den Leiter.



Entlang dieser Kreise gilt:

$$\int_C d\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \frac{2\pi\rho}{2\pi\rho} \cdot \mu_0 \cdot I = \mu_0 I$$

Dies ist konsistent mit

$$\int_{(a)} d\vec{r} \cdot \vec{H} = I \left(+ \int_a d\vec{a} \cdot \dot{\vec{D}} \right)$$

Induktionskoeffizienten

Wir betrachten N Stromschleifen. K -te Schleife werde vom Strom I_K durchflossen. Damit gilt:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \rightarrow \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_K I_K \int_{C^{(K)}} \frac{d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Für den Fluß des $\vec{B}$ -Feldes durch die Fläche $a^{(K)}$ gilt:

$$\begin{aligned} \Phi_k &= \int_{a^{(K)}} d\vec{a} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \int_{a^{(K)}} d\vec{a} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) = \int_{C^{(K)}} d\vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{r}) \\ &= \int_{C^{(K)}} d\vec{r} \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{K'} I_{K'} \int_{C^{(K')}} \frac{d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{K'} L_{KK'} \cdot I_{K'} \end{aligned}$$

mit dem Induktionskoeffizienten

$$L_{KK'} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C^{(K)}} \int_{C^{(K')}} \frac{d\vec{r} \cdot d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$L_{KK'}$ mit $K \neq K'$ wird Gegeninduktionskoeffizient und L_{KK} Selbstinduktionskoeffizient genannt.

3.2 Magnetische Multipolentwicklung

Erinnerung: elektrische Multipolentwicklung (2.4)

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

mit

$$Q' = \int d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}')$$

$$\vec{p} = \int d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') \vec{r}'$$

folgt für $|\vec{r}'| \ll |\vec{r}|$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{Q}{|\vec{r}|} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{|\vec{r}|^3} + \frac{r_\alpha r_\beta Q_{\alpha\beta}}{2|\vec{r}|^5} + \dots \right\}$$

Es ist eine analoge Entwicklung für folgenden Term möglich:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Die Taylorentwicklung für $|\vec{r}'| \ll |\vec{r}|$ liefert:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{1}{|\vec{r}|} \int d^3\vec{r}' \vec{j}(\vec{r}') + \frac{1}{|\vec{r}|^3} \int d^3\vec{r}' \vec{r}' \cdot \vec{r}' \vec{j}(\vec{r}') + \dots \right\}$$

Wir betrachten den 1. Term genauer:

$$\int d^3\vec{r}' \vec{j}(\vec{r}')$$

Es gilt

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}) \vec{r} = \underbrace{\vec{r} \cdot \vec{\nabla}}_{-\dot{\rho}=0} \cdot \vec{j}(\vec{r}) + \vec{j}(\vec{r}) \cdot \underbrace{\vec{\nabla} \vec{r}}_{\hat{I}} = \vec{j}(\vec{r})$$

wobei $\hat{I}$ die Einheitsmatrix bezeichnet.

$$\Rightarrow \int_V d^3\vec{r}' \vec{j}(\vec{r}') = \int_V d^3\vec{r}' \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}') \vec{r}' = \int_{(V)} da' \vec{j}(\vec{r}') \vec{r}' = 0$$

⇒ Die magnetische Multipolentwicklung beginnt mit dem 2. Term!

Wir betrachten nun den 2. Term:

$$\frac{1}{|\vec{r}|^3} \int d^3\vec{r}' \vec{r} \cdot \vec{r}' \vec{j}(\vec{r}')$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \vec{r} \cdot \vec{r}' \underbrace{\vec{j}(\vec{r}')}_{\vec{\nabla}_{\vec{r}'} \cdot \vec{j}(\vec{r}') \vec{r}'} &= \vec{r} \cdot \vec{r}' \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \cdot \vec{j}(\vec{r}') \vec{r}' \\ &= \underbrace{\vec{\nabla}_{\vec{r}'} \cdot \vec{j}(\vec{r}') \vec{r}' \vec{r} \cdot \vec{r}'}_{(1)} - \vec{r}' \vec{j}(\vec{r}') \cdot \underbrace{\vec{\nabla}_{\vec{r}'} \vec{r}' \cdot \vec{r}}_{\hat{I}_{\vec{r}}} \end{aligned}$$

das Volumenintegral über (1) kann in ein verschwindendes Obeflächenintegral umgewandelt werden, daher

$$\int d^3\vec{r}' \vec{r} \cdot \vec{r}' \vec{j}(\vec{r}') = - \int d^3\vec{r}' \vec{r} \cdot \vec{j}(\vec{r}') \vec{r}' \quad (*)$$

Allgemein gilt:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

Deshalb gilt:

$$\begin{aligned} \vec{r} \times [\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')] &= \vec{r} \cdot \vec{j}(\vec{r}') \vec{r}' - \vec{r}' \cdot \vec{r} \vec{j}(\vec{r}') \\ \Rightarrow \int d^3\vec{r}' \vec{r} \cdot \vec{r}' \vec{j}(\vec{r}') &= - \int \vec{r} \times [\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')] d^3\vec{r}' + \underbrace{\int d^3\vec{r}' \vec{r} \cdot \vec{r}' \vec{j}(\vec{r}')}_{(*)} \end{aligned}$$

d.h.

$$\int d^3\vec{r}' \vec{r} \cdot \vec{r}' \vec{j}(\vec{r}') = \frac{1}{2} \int d^3\vec{r}' [\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')] \times \vec{r}$$

Wir definieren das magnetische Dipolmoment

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \mu_0 \int d^3\vec{r}' \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')$$

und finden somit für den (niedrigsten) Dipolanteil des Vektorpotentials:

$$\vec{A}_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$$

Bemerkung:

Für den Dipolanteil des elektrostatischen Potentials gilt (vgl. 2.4):

$$\varphi_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{r^3}$$

Für das zugehörige $\vec{B}$ -Feld gilt:

$$\vec{B}_D(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \times \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$$

Mit $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ ergibt sich:

$$\vec{B}_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \vec{m} \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} - \vec{m} \cdot \vec{\nabla} \frac{\vec{r}}{r^3} \right\}$$

Für $r \neq 0$ gilt für den 1. Term:

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{r^3} \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{r}}_3 + \underbrace{\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r^3}}_{\frac{3\vec{r}}{r^5}} = 0$$

Wir behandeln nun den 2. Term in Komponentenschreibweise:

$$\left[\vec{m} \cdot \vec{\nabla} \frac{\vec{r}}{r^3} \right]_i = m_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{x_i}{r^3} = m_j \frac{\delta_{ij}}{r^3} - m_j \frac{3x_i x_j}{r^5}$$

d.h.

$$\vec{m} \cdot \vec{\nabla} \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{\vec{m} r^2 - 3\vec{m} \cdot \vec{r} \vec{r}}{r^5}$$

d.h.

$$\vec{B}_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{3\vec{m} \cdot \vec{r} \vec{r} - \vec{m} r^2}{r^5} \quad (r > 0)$$

Punktdipol

Das magnetische Dipolmoment ist definiert als

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \mu_0 \int d^3\vec{r} \, \vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})$$

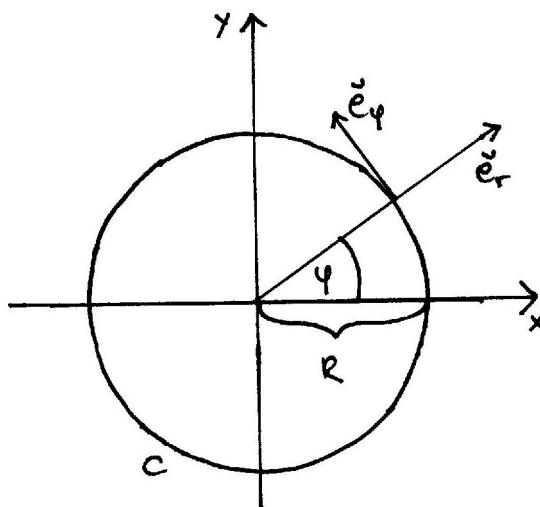
Dieses sei durch einen Stromfaden hervorgerufen:

$$\int_V \vec{j} d^3\vec{r} \rightarrow \int_C I d\vec{r}$$

Daraus folgt für das magnetische Dipolmoment:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \mu_0 I \int_C \vec{r} \times d\vec{r}$$

Wir betrachten speziell eine kreisförmige Leiterschleife.



mit

$$\vec{r} = R \vec{e}_r$$

$$d\vec{r} = R d\varphi \, \vec{e}_\varphi$$

Es gilt:

$$\int_C \vec{r} \times d\vec{r} = \int_0^{2\pi} R^2 \vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi d\varphi = \underbrace{2\pi R^2}_{2a} \vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \vec{m} = \mu_0 I \vec{a}$$

Wird die Fläche a immer mehr verkleinert, so daß $a \rightarrow 0$ und I gleichzeitig so vergrößert, daß das Produkt $I \cdot a$ konstant bleibt, so verschwinden die Beträge höherer Multipolmomente und nur der Dipolbeitrag bleibt übrig. $\Rightarrow$ „Punktdipol“

3.3 Magnetische Kraftwirkungen

Im Kapitel (1.2) wurde für die Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ im $\vec{B}$ -Feld $\vec{B}(\vec{r})$ eine Kraftdichte eingeführt:

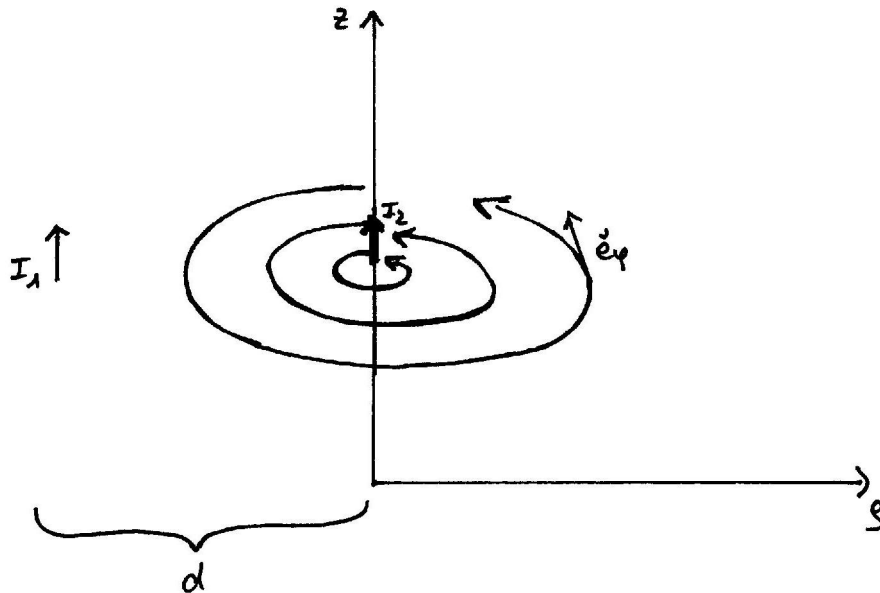
$$f(\vec{r}) = \vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})$$

D.h. die Stromschleife C erfährt eine Kraft

$$\vec{F} = \int_V d^3\vec{r} f(\vec{r}) = \int d^3\vec{r} \vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})$$

$$\vec{F} = I \int_C d\vec{r} \times \vec{B}(\vec{r})$$

Beispiel: Kraft zwischen parallelen Leitern



Für die Kraft auf das Leiterelement $d\vec{r}_1 = dl \vec{e}_z$ gilt:

$$d\vec{F}_{12} = I_1 d\vec{r}_1 \times \vec{B}(\vec{r}_1) = I_1 dl \vec{e}_z \times \vec{B}(\vec{r}_1)$$

In (3.1) wurde berechnet:

$$\vec{B}(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d} \vec{e}_\varphi$$

damit ergibt sich:

$$\frac{d\vec{F}_{12}}{dl} = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi d} \underbrace{\vec{e}_z \times \vec{e}_\varphi}_{-\vec{e}_\rho}$$

d.h. gleichsinnig stromdurchflossene Leiter ziehen sich an und ungleichsinnig durchflossene stoßen sich ab.

3.4 Magnetische Feldenergie

Magnetostatik kann in Analogie zur Elektrostatik formuliert werden. Insbesondere gilt dies für die Energie von elektrischen bzw. magnetischen Dipolanordnungen.

⇒ analoge Ausdrücke für die Feldenergie

$$W_{mag} = \int d^3\vec{r} w_{mag}(\vec{r}) \quad \text{mit}$$

$$w_{mag}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} B^2(\vec{r})$$

mit $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ gilt

$$W_{mag} = \frac{1}{2} \int d^3\vec{r} \vec{H}(\vec{r}) \cdot [\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})]$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} & \vec{\nabla} \cdot [\vec{A}(\vec{r}) \times \vec{H}(\vec{r})] \\ &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} A_j H_k \\ &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \cdot H_k + \epsilon_{ijk} A_j \frac{\partial H_k}{\partial x_i} \\ &= \vec{H} \cdot [\vec{\nabla} \times \vec{A}] - \vec{A} \cdot [\vec{\nabla} \times \vec{H}] \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \frac{1}{2} \int d^3\vec{r} \vec{H}(\vec{r}) \cdot [\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})] \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{\int d^3\vec{r} \vec{\nabla} \cdot [\vec{A} \times \vec{H}]}_{(1)} + \frac{1}{2} \int d^3\vec{r} \underbrace{\vec{A} \cdot [\vec{\nabla} \times \vec{H}]}_{\vec{j}} \end{aligned}$$

Für (1) gilt:

$$\int d^3\vec{r} \vec{\nabla} \cdot [\vec{A} \times \vec{H}] = \int_{(V)} d\vec{a} \cdot [\vec{A} \times \vec{H}] \xrightarrow{V \rightarrow \infty} 0$$

Damit gilt:

$$W_{mag} = \frac{1}{2} \int d^3\vec{r} \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r})$$

Bemerkung:

- Analogon zu

$$W_{el} = \frac{1}{2} \int d^3\vec{r} \rho(\vec{r}) \varphi(\vec{r})$$

- Für eine Leiterschleife gilt offensichtlich

$$W_{mag} = \frac{1}{2} I \int_C d\vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{2} I \int_a d\vec{a} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{2} I \int_a da \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{2} I \Phi$$

Für mehrere Leiterschleifen gilt entsprechend:

$$W_{mag} = \frac{1}{2} \sum_k I_k \Phi_k$$

Unter Ausnutzung von $\Phi_k = \sum_{k'} L_{kk'} I_{k'}$ (vgl. 3.1) folgt:

$$W_{mag} = \frac{1}{2} \sum_{kk'} L_{kk'} I_k I_{k'}$$

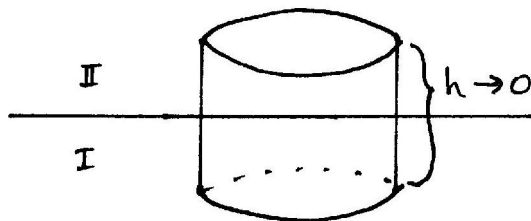
D.h. die Energie ist alleine durch die Stromstärken und die geometrieabhängigen Induktionskoeffizienten gegeben.

Ebenfalls können wir umgekehrt aus der Feldenergie die Induktionskoeffizienten bestimmen

$$L_{kk'} = \frac{\partial^2 W_{mag}}{\partial I_k \partial I_{k'}}$$

3.5 Grenzbedingungen

Analogie zur Elektrostatik, Integration über Dose



$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0 \Rightarrow \int_{V_{Dose}} \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) d^3\vec{r} = 0$$

Es gilt:

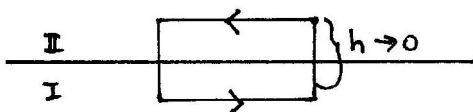
$$\int_{V_{Dose}} \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) d^3\vec{r} = \int_{a_{Dose}} \vec{B}(\vec{r}) d\vec{a} = a_{Dose} (B_{\perp}^I(\vec{r}) - B_{\perp}^{II}(\vec{r}))$$

D.h. es gilt:

$$B_{\perp}^I(\vec{r}) = B_{\perp}^{II}(\vec{r})$$

Die Normalkomponente des $\vec{B}$ -Feldes geht stetig durch die Grenzflächen.

Für das Kurvenintegral durch die Grenzfläche gilt:



$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}) = \vec{j}(\vec{r}) \quad \left| \int d\vec{a} \right.$$

$$\int_C d\vec{r} \cdot \vec{H}(\vec{r}) = I$$

Mit $h \rightarrow 0$ gilt:

$$H_{\parallel}^{II}(\vec{r}) - H_{\parallel}^I(\vec{r}) = s(\vec{r})$$

$s(\vec{r})$ wird als Oberflächenstromdichte bezeichnet.

Die Tangentialkomponente des $\vec{H}$ -Feldes ist stetig, falls es keine Oberflächenströme gibt.

Wir betrachten speziell die lineare Materialgleichung:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu \vec{H}(\vec{r})$$

Daraus folgt:

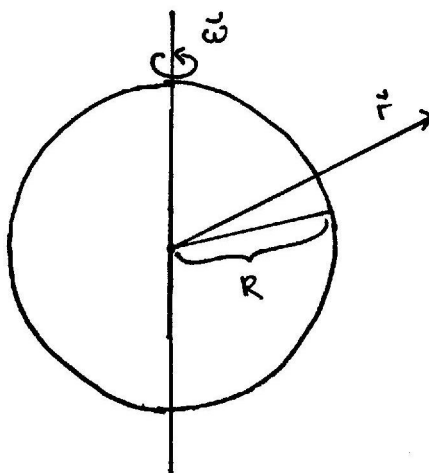
$$B_{\parallel}^I(\vec{r}) = \frac{\mu^I}{\mu^{II}} B_{\parallel}^{II}(\vec{r})$$

$$H_{\perp}^I(\vec{r}) = \frac{\mu^{II}}{\mu^I} H_{\perp}^{II}(\vec{r})$$

d.h. die Tangentialkomponente des $\vec{B}$ -Feldes und die Normalkomponente des $\vec{H}$ -Feldes springen.

3.6 Beispiele

1. Rotierende, geladene Kugel



Die Ladung Q ist gleichmäßig auf der Oberfläche verteilt.

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

Für die Stromdichte gilt:

$$\vec{j} = \rho \vec{v} = \sigma \delta(r - R) \vec{\omega} \times \vec{r}$$

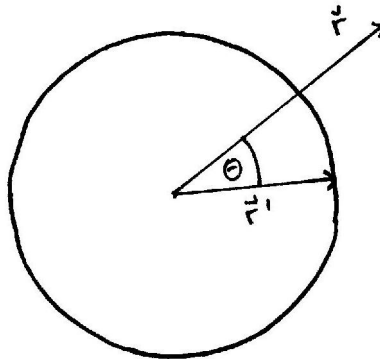
Für das Vektorpotential gilt:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\sigma \delta(r' - R) \vec{\omega} \times \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}' = \frac{Q\mu_0}{16\pi^2 R^2} \vec{\omega} \times \underbrace{\int \frac{\delta(r' - R) \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}'}_{\vec{I}(\vec{r})}$$

Wobei $\vec{I}(\vec{r})$ ein rotationssymmetrisches Integral bezüglich $\vec{r}$ bezeichnet.

$$\Rightarrow \vec{I}(\vec{r}) = I(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

Das Integral wird über Kugelkoordinaten ausgewertet.



$$d^3\vec{r}' = r'^2 \sin(\Theta) d\Theta d\varphi dr'$$

Es gilt:

$$\vec{r} \cdot \vec{r}' = rr' \cos(\Theta)$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \left\{ r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\Theta) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}\vec{I}(\vec{r}) &= \frac{\vec{r}}{r} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\Theta \int_0^\infty dr' \frac{\delta(r' - R) r' \cos(\Theta) r'^2 \sin(\Theta)}{\{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\Theta)\}^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\vec{r}}{r} 2\pi \int_0^\pi d\Theta \frac{R^3 \cos(\Theta) \sin(\Theta)}{\{r^2 + R^2 - 2rR \cos(\Theta)\}^{\frac{1}{2}}}\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Substitution

$$\left| \begin{array}{l} \cos(\Theta) = x \\ \frac{dx}{d\Theta} = -\sin(\Theta) \Rightarrow \sin(\Theta) d\Theta = -dx \end{array} \right|$$

folgt

$$\vec{I}(\vec{r}) = -\frac{\vec{r}}{r} 2\pi R^3 \int_1^{-1} \frac{xdx}{\underbrace{\{r^2 + R^2\}}_A - \underbrace{2rRx}_B}^{\frac{1}{2}}$$

Allgemein gilt:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{A - Bx}} = -\frac{2}{3B^2} (2A + Bx(A - Bx)^{\frac{1}{2}}) + \text{const.}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}I(r) &= -2\pi R^3 \cdot \left(-\frac{2}{3 \cdot 4r^2 R^2} \right) \cdot \\ &\{ [2(r^2 + R^2) - 2rR] \underbrace{[r^2 + R^2 + 2rR]^{\frac{1}{2}}}_{r+R} - [2(r^2 + R^2) + 2rR] \underbrace{[r^2 + R^2 - 2rR]^{\frac{1}{2}}}_{|r-R|} \} \\ &= \frac{2\pi R}{3r^2} \{ (r^2 + R^2 - rR)(r + R) - (r^2 + R^2 + rR)|r - R| \}\end{aligned}$$

Es gilt für $r < R$: $|r - R| = R - r$

$$\begin{aligned}\{...\} &= \{ r(r^2 + R^2 - rR + r^2 + R^2 + rR) + R(r^2 + R^2 - rR - r^2 - R^2 - rR) \} \\ &= \{ 2r^3 + 2rR^2 - 2rR^2 \} = 2r^3\end{aligned}$$

D.h.

$$I(r) = \frac{4}{3}\pi Rr$$

Es gilt für $r > R$: $|r - R| = r - R$

$$\{\dots\} = \{-2r^2R + 2r^2R + 2R^3\} = 2R^3$$

D.h.

$$I(r) = \frac{4}{3}\pi \frac{R^4}{r^2}$$

Damit ergibt sich für das Vektorpotential

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 Q}{12\pi} \begin{cases} \frac{\vec{\omega} \times \vec{r}}{R} & r < R \\ R^2 \vec{\omega} \times \frac{\vec{r}}{r^3} & r > R \end{cases}$$

Es gilt $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Für $r < R$ gilt:

$$\vec{B} = \vec{B}^{(i)} = \frac{\mu_0 Q}{12\pi R} \vec{\nabla} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

Die Auswertung erfolgt Komponentenweise:

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}))_i &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \epsilon_{klm} \omega_l x_m \\ &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \omega_l \delta_{jm} \\ &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{klj} \omega_l \\ &= \underbrace{\epsilon_{ijk} \epsilon_{ljk}}_{2\delta_{il}} \omega_l \\ &= 2\omega_i \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\Rightarrow \vec{B}^{(i)} = \frac{\mu_0 Q}{6\pi R} \vec{\omega}$$

$\vec{B}$ ist homogen und proportional zu ω im Kugelinernen.

Für $r > R$ gilt (ähnliche Rechnung wie in 3.2):

$$\begin{aligned} \vec{B} = \vec{B}^{(a)} &= \frac{\mu_0 Q R^2}{12\pi} \vec{\nabla} \times \left(\vec{\omega} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right) \\ &= \frac{\mu_0 Q R^2}{12\pi} \left(3 \frac{(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{\omega}}{r^3} \right) \end{aligned}$$

Zur Erinnerung: Das Magnetische Dipolfeld in 3.2

$$\vec{B}_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{3\vec{m} \cdot \vec{r}\vec{r} - \vec{m}r^2}{r^5}$$

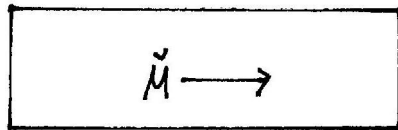
Wir identifizieren das magnetische Dipolmoment hier mit:

$$\vec{m} = \frac{QR^2\vec{\omega}}{3}$$

d.h. die rotierende geladene Kugel hat im Außenraum das Magnetfeld eines Dipols
 $\Rightarrow$ primitives Modell für den Erdmagnetismus

2. Stabmagnet

Wir betrachten einen gleichmäßig magnetisierten Zylinder.



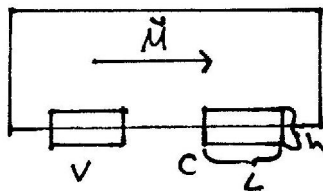
- Wir betrachten zunächst die Stirnflächen.

Die Normalkomponente von $\vec{B}$ geht stetig über (vgl. 3.4):

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{B} - \vec{M}) \quad (1.2)$$

$\Rightarrow$ Die Normalkomponente von $\vec{H}$ springt auf der Stirnfläche. D.h. dort befinden sich die Quellen und Senken von $\vec{H}$.

- Nun wird die Mantelfläche betrachtet.



Wir betrachten zunächst das Volumen V .

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{H} \, d^3\vec{r} = \underbrace{\int_V \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{B}}{\mu_0} d^3\vec{r}}_0 - \int_V \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{M}}{\mu_0} d^3\vec{r} = - \int_{(V)} \frac{\vec{M}}{\mu_0} d\vec{a}$$

Da $\vec{M} \perp d\vec{a}$ im Inneren und $\vec{M} = 0$ im Äußeren gilt, folgt:

$$- \int_{(V)} \frac{\vec{M}}{\mu_0} d\vec{a} = 0$$

$\Rightarrow$ Es gibt keine Quellen und Senken von $\vec{H}$ auf den Mantelflächen.

Wir betrachten nun die Kontur C :

$$\int_C \vec{B} \, d\vec{r} = \int_A \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{H} \, d\vec{a} + \int_C \vec{M} \, d\vec{r}$$

Für $\lim h \rightarrow 0$ gilt:

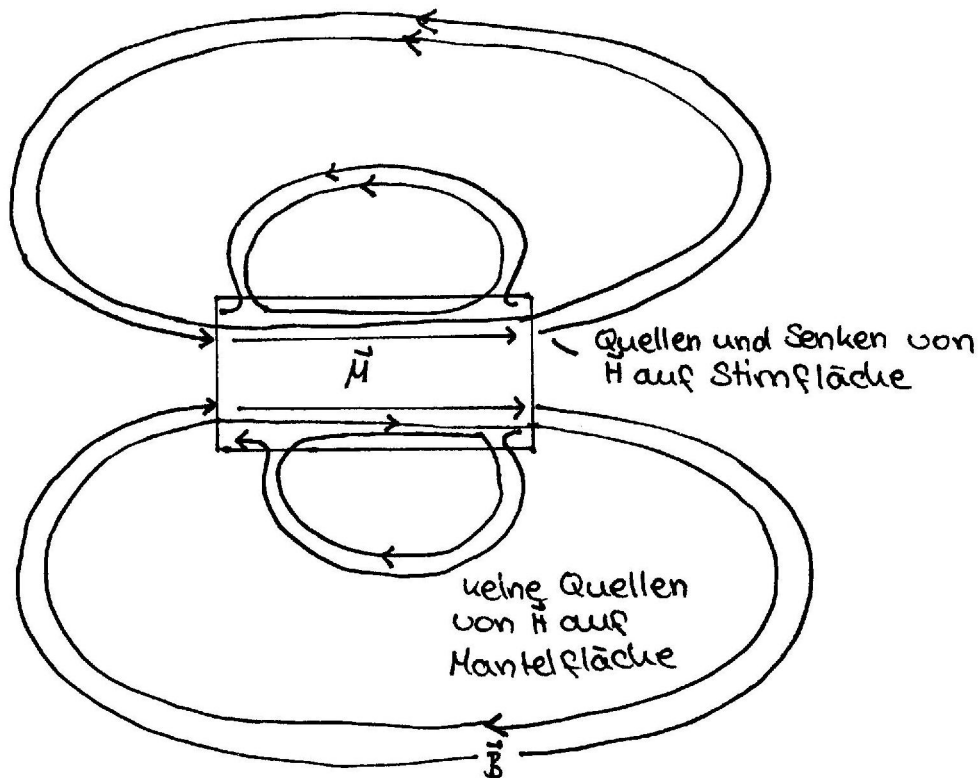
$$\int_A \mu_0 \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{H}}_{\vec{j}=0} d\vec{a} + \int_C \vec{M} \, d\vec{r} = M \cdot L$$

$\Rightarrow$ Es gibt Wirbel des $\vec{B}$ -Feldes auf den Mantelflächen.

Weiterhin gilt im Außenraum:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

Damit ist eine qualitative Diskussion möglich.



- Nun wird die quantitative Lösung betrachtet.

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0 \Rightarrow \exists \varphi_m : \vec{H} = -\vec{\nabla} \varphi_m$$

Wobei φ_m als skalares magnetisches Potential bezeichnet wird.

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{H} &= -\Delta \varphi_m = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \frac{\vec{M}}{\mu_0} \right) \\ &= -\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot \vec{M} \quad (\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0) \\ \Rightarrow \Delta \varphi_m &= \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \cdot \vec{M} =: -\frac{\rho_m}{\mu_0} \end{aligned}$$

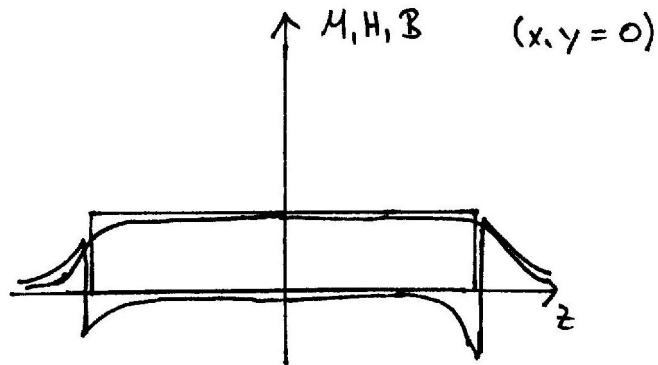
mit ρ_m als magnetische Ladungsdichte, welche allein durch Dipole gegeben wird.

Offensichtlich ergibt sich φ_m als Lösung des Poissonproblems wie in der Elek-

trostatik.

$$\varphi_m(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\mu_0} \int \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{M}(\vec{r}') d^3r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\vec{H} = -\vec{\nabla} \varphi_m$$



4 Quasistationäre Felder

Wir lassen jetzt zeitlich veränderliche Felder zu, wie sie für niederfrequente Elektrotechnik typisch sind.

Der Stromfluß erfolgt durch eine Kraft auf die Ladungsträger. Die Ursache dieser Kraft ist oft ein elektrisches Feld.

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{j}[E(\vec{r}, t)]$$

In linearer, lokaler und instantaner Näherung gilt das Ohmsche Gesetz:

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \sigma \vec{E}(\vec{r}, t)$$

mit der Leitfähigkeit σ .

Elektrische Felder sind quasistationär für

$$|\dot{\vec{D}}| \ll |\vec{j}|$$

d.h.

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} - \dot{\vec{D}} = \vec{j} \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}$$

Weiterhin gilt:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

Wir verwenden im folgenden die Materialgleichungen in linearer Näherung.

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \frac{\epsilon}{\sigma} \vec{j}$$

d.h.

$$\dot{\vec{D}} = \frac{\epsilon}{\sigma} \dot{\vec{j}}$$

Sei $\vec{j} \sim e^{i\omega t} \Rightarrow \dot{\vec{j}} \sim i\omega \vec{j}$. Damit ergibt sich:

$$\dot{\vec{D}} \sim i \frac{\epsilon\omega}{\sigma} \vec{j}$$

Die Bedingung für quasistationäre Felder $\left| \dot{\vec{D}} \right| \ll \left| \vec{j} \right|$ führt auf:

$$\frac{\epsilon\omega}{\sigma} \ll 1 \quad \text{bzw.} \quad \omega \ll \frac{\sigma}{\epsilon}$$

d.h. quasistationäre Felder erfordern gut leitende Medien.

Wir können deshalb $\dot{\vec{B}}$ nicht vernachlässigen:

$\dot{\vec{B}}$ induziert ein $\vec{E}$ -Feld. Selbst kleine $\vec{E}$ -Felder können in gut leitenden Medien starke Ströme verursachen.

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{j} \quad \left| \vec{\nabla} \cdot \right. \\ \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{j} &= 0 \end{aligned}$$

Aufgrund der Kontinuitätsgleichung gilt:

$$\underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{j}}_{-\dot{\rho}} = 0$$

D.h. wir erwarten keine zeitliche Änderung der Ladungsdichte. Exakt gilt:

$$\dot{\rho} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\vec{\nabla} \cdot \sigma \vec{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon} \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{D}}_{\rho}$$

wobei $\vec{E}$ und $\vec{D}$ die von ρ im leitenden Medium erzeugten Eigenfelder sind.

Aus $\dot{\rho} = -\frac{\sigma}{\epsilon}\rho$ folgt:

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{mit} \quad \tau = \frac{\epsilon}{\sigma}$$

D.h. die in einem leitenden, insgesamt elektrischen neutralen Material vorhandene Raumladungsdichte $\rho \neq 0$ klingt exponentiell ab. Die Ursache liegt im Eigenfeld. (Beispiel Cu: $\tau \approx 10^{-17} \text{s}$)

4.1 Faradaysches Induktionsgesetz

Das Induktionsgesetz lautet in differentieller Form:

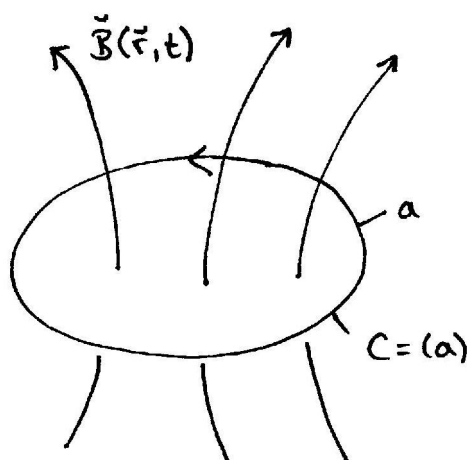
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0 \quad \left| \int_a d\vec{a} \right.$$

Für zeitunabhängige Geometrien gilt offensichtlich:

$$\int_{(a)} d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = - \int_a d\vec{a} \cdot \dot{\vec{B}}(\vec{r}, t) = - \frac{d\Phi(t)}{dt}$$

mit dem magnetischen Fluß

$$\Phi(t) = \int_a d\vec{a} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t)$$



Die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses Φ durch eine Fläche a liefert ein von Null verschiedenes Wegintegral der elektrischen Feldstärke längs der Berandungskurve der Fläche.

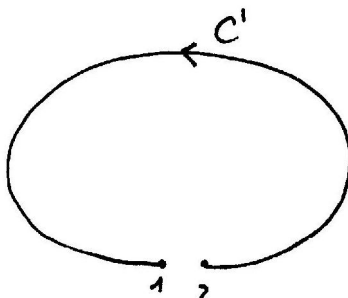
Nach Kapitel (2.3) gilt:

Wegintegral des $\vec{E}$ -Feldes $\hat{=}$ Spannung

d.h. für die induzierte Spannung entlang C gilt:

$$U_{ind} = - \frac{d\Phi(t)}{dt}$$

Wir betrachten eine (unterbrochene) Leiterschleife:

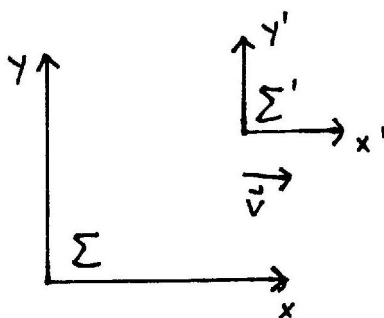


$$U_{ind} = \int_C d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = \underbrace{\int_{C'} d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t)}_{\substack{0 \text{ für } \sigma \rightarrow \infty \\ 0}} + \underbrace{\int_1^2 d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t)}_{U_{12}}$$

d.h. für einen idealen Leiter gilt:

$$U_{12} = U_{ind} = -\frac{d\Phi(t)}{dt}$$

Jetzt betrachten wir einen bewegten Leiter. Wir betrachten das Inertialsystem Σ' das sich bezüglich Σ mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegt.



Für die Transformation der Felder in Σ und Σ' gilt:

$$\begin{aligned}\vec{E}' &= \gamma \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\vec{v}\vec{v}}{v^2} \cdot \vec{E} \right) \\ \vec{B}' &= \gamma \left(\vec{B} - \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\vec{v}\vec{v}}{v^2} \cdot \vec{B} \right)\end{aligned}$$

mit

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Der Beweis folgt in Kapitel (6.3).

Jetzt wird der nichtrelativistische Grenzfall betrachtet:

$$|\vec{v}| \ll c, \text{ d.h. } \gamma \rightarrow 1$$

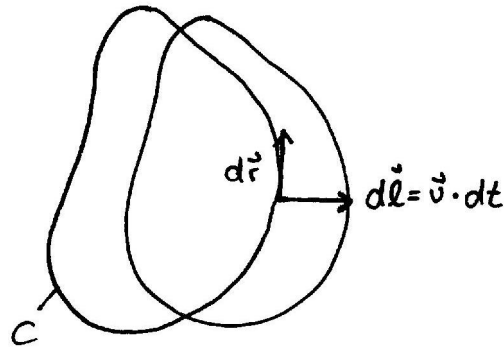
$$\begin{aligned}\vec{B}' &= \vec{B} \\ \vec{E}' &= \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\end{aligned}$$

Die bewegte Leiterschleife ruhe in Σ' . Wir können folgenden Term umformen:

$$U_{ind} = \int_{(a)} d\vec{r} \cdot \vec{E}' = - \int_a d\vec{a} \cdot \dot{\vec{B}} + \underbrace{\int_{(a)} d\vec{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{B})}_{(1)} \quad (*)$$

Wobei U_{ind} der in der bewegten Leiterschleife induzierte Spannung entspricht. Zu (1) läßt sich sagen, daß durch die Bewegung des Leiters in ihm Ladungsträger bewegt werden, welche eine Kraft im Magnetfeld erfahren.

Änderung des magnetischen Flusses durch eine bewegte Leiterschleife?



Es gibt 2 Anteile:

- Änderung des Feldes
- Änderung der Fläche = $d\vec{l} \times d\vec{r} = dt \vec{v} \times d\vec{r}$

$$d\Phi \Big|_{B=\text{const}} = dt \int_C (\vec{v} \times d\vec{r}) \cdot \vec{B} = -dt \int_C d\vec{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

d.h. die gesamte zeitliche Änderung von Φ ist gegeben durch

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_a \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{B} - \int_C d\vec{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

Der Vergleich mit (*) liefert:

$$U_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

D.h. die induzierte Spannung ist generell durch eine lokale zeitliche Änderung des Induktionsflusses gegeben; auch für zeitlich veränderliche Geometrien.

Jetzt wird ein System von Leiterschleifen betrachtet. In Kapitel (3.1) eingeführt:

$$\Phi_k = \sum_{k'} L_{kk'} I_{k'}$$

wobei Φ_k den Induktionsfluss durch die k-te Leiterschleife, $L_{kk'}$ den geometrieabhängigen Induktionskoeffizienten und $I_{k'}$ den Strom in der k'-ten Leiterschleife beschreibt.

D.h.

$$\dot{\Phi}_k = \sum_{k'} L_{kk'} \dot{I}_{k'}$$

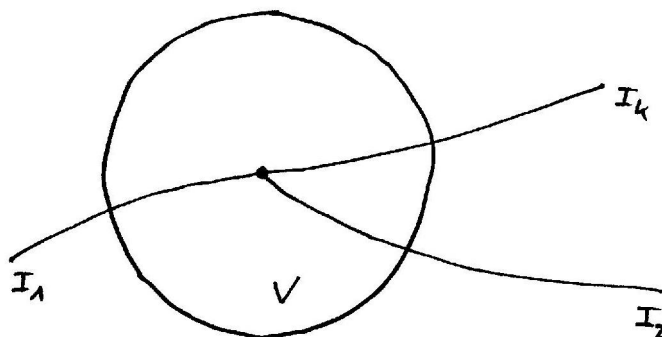
Daraus folgt:

$$U_k^{ind} = - \sum_{k'} L_{kk'} \dot{I}_{k'}$$

Diese Gleichung gibt die in der k-ten Leiterschleife induzierte Spannung an.

4.2 Kirchhoffsche Regeln

Wir betrachten einen Leiterknoten im Raumbereich V.



Die Kontinuitätsgleichung besagt:

$$\dot{\rho} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

wobei bei quasistationären Feldern $\dot{\rho} = 0$ gilt.

$$\Rightarrow 0 = \int_V d^3\vec{r} \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \int_{(V)} d\vec{a} \cdot \vec{j} = \sum_k \underbrace{\int_{a_k} d\vec{a} \cdot \vec{j}}_{I_k}$$

wobei a_k die Querschnittsfläche des k-ten Leiters beschreibt.

Daraus folgt die Kirchhoffsche Stromregel:

$$\sum_k I_k = 0$$

Wir betrachten den k-ten Leiterkreis aus einem System von Leiterkreisen. Dafür gilt das Induktionsgesetz:

$$\int_{C_k} d\vec{r} \cdot \vec{E} = -\dot{\Phi} = U_k^{ind}$$

Daraus folgt die Kirchhoffsche Spannungsregel:

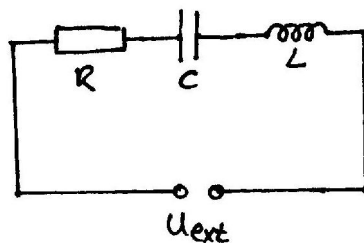
$$\int_{C_k} d\vec{r} \cdot \vec{E} - U_k^{ind} = 0$$

Die Summe aller in einem Leiterkreis auftretenden Spannungen ist Null.

Bemerkung:

Die induzierte Spannung wirkt hier als elektromotorische Kraft. Diese geht mit negativen Vorzeichen mit ein. Dies gilt auch für jede andere im Stromkreis befindliche elektromotorische Kraft U_k^{ext} .

Beispiel: Reihenschwingkreis



Die Spannungsregel liefert:

$$\underbrace{\int_{C_R} d\vec{r} \cdot \vec{E}}_{(1)} + \underbrace{\int_{C_C} d\vec{r} \cdot \vec{E}}_{(2)} + \underbrace{\int_{C_{Draht}} d\vec{r} \cdot \vec{E}}_{(3)} - \underbrace{U_L^{ind}}_{-L \cdot I} = U^{ext}$$

Für (1) gilt:

$$\int_{C_R} d\vec{r} \cdot \vec{E} = \int_{C_R} \frac{d\vec{r} \cdot \vec{j}}{\sigma}$$

Wenn $\vec{j}$ konstant über dem Leiterquerschnitt Δa ist gilt:

$$\int_{C_R} \frac{d\vec{r} \cdot \vec{j}}{\sigma} = I \underbrace{\int \frac{dr}{\sigma \Delta a}}_R = IR$$

Für (2) gilt nach (2.8.5):

$$\int_{C_C} d\vec{r} \cdot \vec{E} = U_C = \frac{Q}{C}$$

Und zu (3) läßt sich sagen, daß es entweder vernachlässigt werden kann oder über R berücksichtigt wird.

Also gilt:

$$\begin{aligned} L\dot{I} + RI + \frac{Q}{C} &= U^{ext} \quad \left| \frac{d}{dt} \right. \\ L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{\dot{Q}}{C} &= \dot{U}^{ext} \end{aligned}$$

mit $\dot{Q} = I$ folgt schließlich:

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{I}{C} = \dot{U}^{ext}$$

Seit speziell $U^{ext}(t) = Re(\tilde{U}e^{i\omega t})$. Dann gilt im stationären Zustand:

$$I(t) = Re(\tilde{I}e^{i\omega t})$$

Das Einsetzen von $\tilde{I}e^{i\omega t}$ in die DGL liefert:

$$\left(-L\omega^2 + iR\omega + \frac{1}{C}\right) \tilde{I} = i\omega \tilde{U}$$

d.h.

$$\underbrace{\left[R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right]}_{\tilde{R}} \tilde{I} = \tilde{U}$$

wobei $\tilde{R}$ als komplexer oder Scheinwiderstand bezeichnet wird. Dieser setzt sich zusammen aus:

- reeller Ohmscher Widerstand

$$\tilde{R}_R = R$$

- imaginärer induktiver Widerstand

$$\tilde{R}_L = i\omega L$$

- imaginärer kapazitiver Widerstand

$$R_C = \frac{-i}{\omega C}$$

⇒ Wir können mit der komplexen Schreibweise den Einfluß von Induktivitäten und Kapazitäten formal analog zum Einfluß eines Ohmschen Widerstands behandeln.

Wir schreiben:

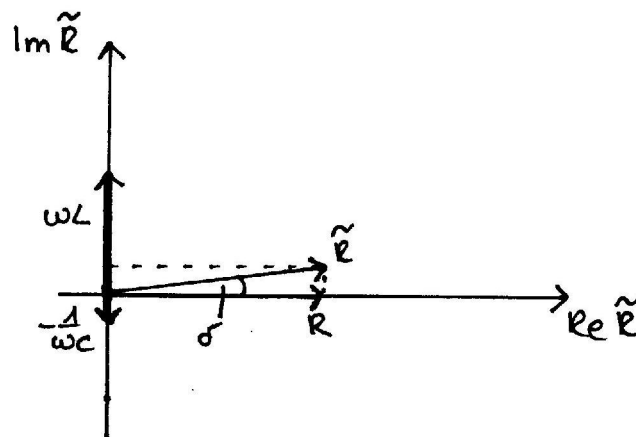
$$\begin{aligned} \tilde{R} &= |\tilde{R}| e^{i\delta} \\ \tilde{U} &= |\tilde{U}| e^{i\phi_U} \\ \tilde{I} &= |\tilde{I}| e^{i\phi_I} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$|\tilde{U}| e^{i\phi_U} = |\tilde{R}| e^{i\delta} |\tilde{I}| e^{i\phi_I}$$

d.h. für die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom gilt:

$$\Delta\phi = \phi_U - \phi_I = \delta$$



Es gibt 3 mögliche Fälle:

1. Der Strom bleibt hinter der Spannung zurück

$$\omega L > \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \delta > 0$$

2. Strom und Spannung sind in Phase

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \delta = 0$$

3. Der Strom eilt der Spannung voraus

$$\omega L < \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \delta < 0$$

5 Volles System der Maxwellgleichungen

Wir nehmen jetzt alle Terme in den Maxwellgleichungen mit.

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} - \dot{\vec{D}} &= \vec{j}\end{aligned}$$

5.1 Energiebilanz

$$\begin{array}{rcl}\dot{\vec{B}} + \vec{\nabla} \times \vec{E} &= 0 & \Big| \vec{H} \\ -\left\{ -\dot{\vec{D}} + \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} \right\} & & \Big| \vec{E} \\ \hline \vec{H} \cdot \dot{\vec{B}} + \vec{E} \cdot \dot{\vec{D}} + \underbrace{\vec{H}(\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H})}_{\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H})} &= & -\vec{j} \cdot \vec{E}\end{array}$$

Dies gilt da:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \epsilon_{ijk} E_j H_k = \epsilon_{ijk} H_k \frac{\partial E_j}{\partial x_i} + \epsilon_{ijk} E_j \frac{\partial H_k}{\partial x_i} \\ &= H_k \epsilon_{kij} \frac{\partial}{\partial x_i} E_j - E_j \epsilon_{jik} \frac{\partial}{\partial x_i} H_k = \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H})\end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\vec{E} \cdot \dot{\vec{D}} + \vec{H} \cdot \dot{\vec{B}} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\vec{j} \cdot \vec{E}$$

Wir definieren den Poynting-Vektor

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t)$$

und erhalten:

$$\vec{E} \cdot \dot{\vec{D}} + \vec{H} \cdot \dot{\vec{B}} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$$

Speziell im Vakuum gilt:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

Damit ergibt sich:

$$\vec{E} \cdot \dot{\vec{D}} + \vec{H} \cdot \dot{\vec{B}} = \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\left\{ \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2} \mu_0 \vec{H}^2 \right\}}_{\omega(\vec{r}, t)}$$

wobei $\omega(\vec{r}, t)$ die Dichte der elektromagnetischen Feldenergie angibt.

Damit ergibt sich für die lokale Bilanzgleichung:

$$\dot{\omega} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$$

In integraler Form wird dies als Poyntingscher Satz bezeichnet:

$$\frac{dW}{dt} + \int_{(V)} d\vec{a} \cdot \vec{S} = - \int_V d^3\vec{r} \vec{j} \cdot \vec{E}$$

Dies entspricht der Energiebilanz in der Elektrodynamik. Der Poyntingvektor ist die elektromagnetische Energiestromdichte.

Die elektromagnetische Feldenergie ist keine Erhaltungsgröße. Sie kann entstehen und vergehen und zwar genau dann, wenn der Querkern $-\vec{j} \cdot \vec{E}$ ungleich Null ist.

Wir betrachten zur Veranschaulichung ein System von geladenen Punktteilchen:

$$W_{kin} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha}^2$$

$$\frac{dW_{kin}}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} 2 \dot{\vec{r}}_{\alpha} \ddot{\vec{r}}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}$$

wobei $\vec{F}_{\alpha}$ die Kraft auf das α -te Teilchen angibt.

Die Teilchen sollen nur elektromagnetische Kräfte erfahren.

$$\vec{F}_{\alpha} = q_{\alpha} E_{\alpha} + q_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha} \times \vec{B}_{\alpha}$$

Damit ergibt sich:

$$\frac{dW_{kin}}{dt} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha} \cdot \vec{E}_{\alpha}$$

mit

$$\vec{j} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha} \delta(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha})$$

gilt:

$$\frac{dW_{kin}}{dt} = \int_V d^3\vec{r} \vec{j} \cdot \vec{E} \quad (*)$$

d.h. der Poyntingschen Satz nimmt jetzt folgende Form an:

$$\frac{d}{dt}(W + W_{kin}) = - \int_{(V)} d\vec{a} \cdot \vec{S}$$

zu (*):

$\vec{j} \cdot \vec{E}$ beschreibt die Leistungsdichte der vom elektromagnetischen Feld an der Stromdichte $\vec{j}$ verrichteten Arbeit. Es beschreibt die Umwandelbarkeit von elektromagnetischer Energie in andere Energieformen:

- mechanische (kinetische) Energie $\rightarrow$ elektromagnetische Energie (Generator)
- elektromagnetische Energie $\rightarrow$ mechanische (kinetische) Energie (Motor)
- elektromagnetische Energie $\rightarrow$ kinetische Energie $\rightarrow$ Wärme (Ohmscher Widerstand)

Bisher haben wir Vakuum betrachtet; jetzt handelt es sich um ein lineares Medium (wobei die Dispersion zunächst vernachlässigt wird).

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}, t)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \mu(\vec{r}) \vec{H}(\vec{r}, t)$$

Der Poyntingsche Satz gilt unverändert, aber die Dichte der elektromagnetischen Feldenergie wird jetzt geben durch:

$$\omega(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \epsilon(\vec{r}) \vec{E}^2(\vec{r}, t) + \frac{1}{2} \mu(\vec{r}) \vec{H}^2(\vec{r}, t)$$

Wir erlauben jetzt Dispersion und betrachten ein monochromatisches Feld:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{2} \vec{E}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} + c.c. \\ \vec{H}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{2} \vec{H}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} + c.c.\end{aligned}$$

Bemerkung:

Mittelung von $\vec{E}^2(\vec{r}, t)$ und $\vec{H}^2(\vec{r}, t)$ über die Periode T ergibt.

$$\begin{aligned}\langle \vec{E}^2 \rangle &= \frac{1}{2} |E(\vec{r}, \omega)|^2 \\ \langle \vec{H}^2 \rangle &= \frac{1}{2} |H(\vec{r}, \omega)|^2\end{aligned}$$

Aus $\vec{E}$ und $\vec{H}$ folgen $\vec{D}$ und $\vec{B}$:

$$\begin{aligned}\vec{D}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{2} \left[\epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, \omega) + \vec{P}(\vec{r}, \omega) \right] e^{-i\omega t} + c.c. \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{2} \left[\mu_0 \vec{H}(\vec{r}, \omega) + \vec{M}(\vec{r}, \omega) \right] e^{-i\omega t} + c.c.\end{aligned}$$

$\frac{\partial}{\partial t}$ liefert:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{D}}(\vec{r}, t) &= -\frac{i}{2} \omega \left[\epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, \omega) + \vec{P}(\vec{r}, \omega) \right] e^{-i\omega t} + c.c. \\ \dot{\vec{B}}(\vec{r}, t) &= -\frac{i}{2} \omega \left[\mu_0 \vec{H}(\vec{r}, \omega) + \vec{M}(\vec{r}, \omega) \right] e^{-i\omega t} + c.c.\end{aligned}$$

Einsetzen liefert:

$$\langle \dot{\omega} \rangle = \langle \vec{E} \cdot \dot{\vec{D}} + \vec{H} \cdot \dot{\vec{B}} \rangle = \frac{\omega}{2} \left\{ \text{Im} (\vec{P}(\omega) \cdot \vec{E}^*(\omega)) + \text{Im} (\vec{M}(\omega) \cdot \vec{H}^*(\omega)) \right\}$$

d.h. die gemittelte lokale Bilanzgleichung

$$\dot{\omega} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$$

geht für die Abwesenheit makroskopischer Ströme (d.h. $\vec{j} = 0$) in folgenden Term über:

$$\vec{\nabla} \cdot \langle \vec{S} \rangle = -\frac{\omega}{2} \left\{ \text{Im} (\vec{P}(\omega) \cdot \vec{E}^*(\omega)) + \text{Im} (\vec{M}(\omega) \cdot \vec{H}^*(\omega)) \right\}$$

Im Vakuum gilt $\vec{P} = \vec{M} = 0$. Daraus folgt:

$$\vec{\nabla} \cdot \langle \vec{S} \rangle = 0$$

D.h. ein monochromatisches elektromagnetisches Feld im leeren Raum bedeutet einen im zeitlichen Mittel konstanten Energiestrom.

Für ein lineares Medium gilt:

$$\vec{P}(\omega) = \epsilon_0 \chi_{el}(\omega) \vec{E}(\omega)$$

d.h.

$$\begin{aligned} & \text{Im} (\vec{P}(\omega) \cdot \vec{E}^*(\omega)) \\ &= \text{Im} (\epsilon_0 \chi_{el}(\omega) |\vec{E}(\omega)|^2) \\ &= \text{Im} \epsilon(\omega) \cdot \underbrace{|\vec{E}(\omega)|^2}_{2\langle \vec{E}(\vec{r}, t) \rangle_T} \end{aligned}$$

Analog gilt:

$$\text{Im} (\vec{M}(\omega) \cdot \vec{H}^*(\omega)) = 2 \text{Im} \mu(\omega) \langle \vec{H}(\vec{r}, t) \rangle_T$$

Damit wird aus (*):

$$\vec{\nabla} \cdot \langle \vec{S}(\vec{r}, t) \rangle = -\omega \left\{ \text{Im} \epsilon(\omega) \langle \vec{E}(\vec{r}, t)^2 \rangle + \text{Im} \mu(\omega) \langle \vec{H}(\vec{r}, t)^2 \rangle \right\}$$

D.h. die im Medium stattfindende Absorption (d.h. Dissipation) elektromagnetischer Felder wird durch die Imaginärteile von ϵ und μ bestimmt!

5.2 Eichtransformationen

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \Rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} &= 0 \text{ wird zu} \\ \vec{\nabla} \times [\vec{E} + \dot{\vec{A}}] &= 0 \end{aligned}$$

d.h. $\vec{E} + \dot{\vec{A}}$ muß sich als Gradient eines skalaren Feldes darstellen lassen:

$$\begin{aligned} \vec{E} + \dot{\vec{A}} &= -\vec{\nabla} \varphi \text{ bzw.} \\ \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\dot{\vec{A}}(\vec{r}, t) - \vec{\nabla} \varphi(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

Es verbleiben noch die inhomogenen Maxwellgleichungen:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} - \dot{\vec{D}} = \vec{j}$$

Im Vakuum gilt:

$$\underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{D}}_{\rho} = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \varphi + \dot{\vec{A}})$$

Daraus folgt:

$$-\Delta \varphi - \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{A}} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (*)$$

entsprechend gilt:

$$\vec{j} = \vec{\nabla} \times \vec{H} - \dot{\vec{D}} = \underbrace{\vec{\nabla} \times \frac{1}{\mu_0} \vec{B}}_{(1)} - \underbrace{\epsilon_0 \dot{\vec{E}}}_{(2)}$$

Für (1) gilt:

$$\vec{\nabla} \times \frac{1}{\mu_0} \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} - \Delta \vec{A})$$

Aus (2) folgt:

$$\epsilon_0 \dot{\vec{E}} = -\epsilon_0 (\ddot{\vec{A}} + \vec{\nabla} \dot{\varphi})$$

Somit gilt:

$$\underbrace{\epsilon_0 \mu_0}_{\frac{1}{c^2}} \ddot{\vec{A}} - \Delta \vec{A} + \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \underbrace{\epsilon_0 \mu_0}_{\frac{1}{c^2}} \dot{\varphi}) = \mu_0 \vec{j}$$

d.h.

$$\frac{1}{c^2} \ddot{\vec{A}} - \Delta \vec{A} + \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \dot{\varphi}) = \mu_0 \vec{j} \quad (**)$$

(*) und (**) koppeln das skalare und das Vektorpotential miteinander. Ist die Entkoppelung durch eine geeignete Eichtransformation möglich?

In Kapitel (3.1) wurde angenommen, daß $\vec{A}$ und $\vec{A}'$ gleichberechtigte Vektorpotentiale sind, wenn gilt:

$$\vec{A}' - \vec{A} = \vec{\nabla} \chi$$

d.h. dann gilt $\vec{B} = \vec{B}'$.

Wir fordern jetzt

$$-\dot{\vec{A}} - \vec{\nabla}\varphi = \vec{E} = \vec{E}' = -\dot{\vec{A}}' - \vec{\nabla}\varphi'$$

d.h.

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}(\varphi' - \varphi) &= -\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{(\vec{A}' - \vec{A})}_{\vec{\nabla}\chi} \\ \Rightarrow \vec{\nabla}(\varphi' - \varphi + \dot{\chi}) &= 0\end{aligned}$$

d.h. $\varphi' = \varphi - \dot{\chi} (+const.)$. Das bedeutet, daß die Felder $\vec{E}(\vec{r}, t)$ und $\vec{B}(\vec{r}, t)$ unverändert unter folgender Eichtransformation bleiben:

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}, t) &\rightarrow \vec{A}'(\vec{r}, t) = \vec{A}(\vec{r}, t) + \vec{\nabla}\chi(\vec{r}, t) \\ \varphi(\vec{r}, t) &\rightarrow \varphi'(\vec{r}, t) = \varphi(\vec{r}, t) - \dot{\chi}(\vec{r}, t)\end{aligned}$$

Eine spezielle Eichung ist die Coulombeichung:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

Diese geht immer (vgl. 3.1).

Damit vereinfachen wir (*) zu:

$$\Delta\varphi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho$$

und aus (**) wird:

$$\frac{1}{c^2}\ddot{\vec{A}} - \Delta\vec{A} + \vec{\nabla}\frac{1}{c^2}\dot{\varphi} = \mu_0\vec{j}$$

Mit der longitudinalen Stromdichte

$$\vec{j}_{\parallel} = \epsilon_0\vec{\nabla}\dot{\varphi}$$

und der transversalen Stromdichte

$$\vec{j}_{\perp} = \vec{j} - \vec{j}_{\parallel}$$

gilt:

$$\frac{1}{c^2} \ddot{\vec{A}} - \Delta \vec{A} = \mu_0 (\vec{j} - \epsilon_0 \vec{\nabla} \dot{\varphi}) = \mu_0 \vec{j}_\perp$$

Die Lösung von $\Delta \varphi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$ ist gegeben durch das Poissonintegral:

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \left| \frac{\partial}{\partial t} \right. \\ \dot{\varphi}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \frac{\dot{\rho}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \end{aligned}$$

mit $\dot{\rho} + \text{div } \vec{j} = 0$ folgt:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(\vec{r}, t) &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}', t) \quad \left| \epsilon_0 \vec{\nabla} \right. \\ \underbrace{\epsilon_0 \vec{\nabla} \dot{\varphi}(\vec{r}, t)}_{\vec{j}_\parallel(\vec{r}, t)} &= \frac{1}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \underbrace{\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}', t)}_{(1)} \end{aligned}$$

Aus (1)

$$\int d^3\vec{r}' \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}', t) = - \int d^3\vec{r}' \vec{j}(\vec{r}', t) \cdot \vec{\nabla}' \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

D.h. $\vec{j}_\parallel(\vec{r}, t)$ ist als Funktional von $\vec{j}(\vec{r}, t)$ bekannt. Es handelt sich um einen nicht lokalen Zusammenhang, da die longitudinale Stromdichte am Ort $\vec{r}$ von $\vec{j}$ an allen möglichen Orten $\vec{r}'$ abhängt.

Letztlich haben wir so gezeigt, daß die Coulombbeziehung die Gleichungen für das skalare Potential und das Vektorpotential tatsächlich entkoppeln.

Bemerkung:

Für beliebige $\vec{A}$ und φ gibt es immer ein Eichfeld χ , welches sicherstellt, daß $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \chi$ der Coulombbeziehung genügt (vgl. 3.1):

$$\begin{aligned} \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{A}'(\vec{r}, t)}_{=0!} &= \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) + \Delta \chi(\vec{r}, t) \\ \Rightarrow -\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) &= \Delta \chi(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

Im allgemeinen ist $\vec{A}$ eine Funktion von Ort und Zeit.

$\Rightarrow \chi$ und $\dot{\chi}$ sind auch Funktionen der Zeit.

$\Rightarrow$ Zeitabhängigkeit auch in $\varphi' = \varphi - \dot{\chi}$.

Im Hinblick auf eine kovariante Formulierung der Elektrodynamik ist eine weitere Eichung hilfreich, die sogenannte Lorentz-Eichung:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c^2} \dot{\varphi}(\vec{r}, t) = 0$$

Für (*) gilt dann:

$$-\Delta\varphi - \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{A}}_{-\frac{1}{c^2}\ddot{\varphi}} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Daraus folgt:

$$\frac{1}{c^2}\ddot{\varphi} - \Delta\varphi = \frac{1}{\epsilon_0}\rho$$

Für (**) folgt:

$$\frac{1}{c^2}\ddot{\vec{A}} - \Delta\vec{A} + \underbrace{\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\dot{\varphi})}_{-\vec{\nabla} \cdot \vec{A}} = \mu_0 \vec{j}$$

Daraus folgt:

$$\frac{1}{c^2}\ddot{\vec{A}} - \Delta\vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

D.h. die Gleichungen für skalares und Vektorpotential gehen in inhomogene Wellengleichungen über.

Ist die Lorentz-Eichung immer möglich?

Allgemein gilt:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\chi$$

$$\varphi' = \varphi - \dot{\chi}$$

Wir fordern

$$0 = \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{A}'}_{(1)} + \underbrace{\frac{1}{c^2}\dot{\varphi}'}_{(2)}$$

Für (1) gilt:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \Delta\chi$$

und für (2) gilt:

$$\frac{1}{c^2}\dot{\varphi}' = \frac{1}{c^2}\dot{\varphi} - \frac{1}{c^2}\ddot{\chi}$$

d.h.

$$\frac{1}{c^2}\ddot{\chi} - \Delta\chi = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\dot{\varphi}$$

Damit ergibt sich das Eichfeld als Lösung einer inhomogenen Wellengleichung, welche immer Lösungen besitzt.

5.3 Freie elektromagnetische Wellen

Freie Wellen heißt $\rho = 0 = \vec{j}$, damit gehen Potentialgleichungen in Coulombbeziehung (5.2) über in:

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= 0 \\ \frac{1}{c^2}\ddot{\vec{A}} - \Delta\vec{A} &= 0\end{aligned}$$

Im Unendlichen verschwindet das Potential. Damit gilt $\varphi = 0$ und es verbleibt zu lösen:

$$\frac{1}{c^2}\ddot{\vec{A}} - \Delta\vec{A} = 0 \quad \text{unter Bed. } \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (*)$$

Entsprechend ergibt sich in Lorentzbeziehung (**)

$$\begin{aligned}\frac{1}{c^2}\ddot{\varphi} - \Delta\varphi &= 0 \\ \frac{1}{c^2}\ddot{\vec{A}} - \Delta\vec{A} &= 0 \\ \text{unter Bed. } \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\dot{\varphi} &= 0\end{aligned}$$

Wir können auch direkt von den MWG starten:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} - \dot{\vec{D}} = \vec{j} = 0$$

Im Vakuum gilt:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}$$

$$\dot{\vec{D}} = \epsilon_0 \dot{\vec{E}}$$

Daraus folgt:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \dot{\vec{E}} \quad \left| \frac{\partial}{\partial t} \right.$$

$$\vec{\nabla} \times \underbrace{\dot{\vec{B}}}_{-\vec{\nabla} \times \vec{E}} = \frac{1}{c^2} \ddot{\vec{E}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c^2} \ddot{\vec{E}} = -\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\vec{\nabla} \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}}_{\frac{1}{\epsilon_0} \rho=0} + \Delta \vec{E}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c^2} \ddot{\vec{E}} = \Delta \vec{E}$$

Andererseits gilt:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \dot{\vec{E}} \quad \left| \vec{\nabla} \times \right.$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{B}}_0 - \Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2} \underbrace{\vec{\nabla} \times \dot{\vec{E}}}_{-\ddot{\vec{B}}}$$

Daraus folgt:

$$\frac{1}{c^2} \ddot{\vec{B}} = \Delta \vec{B}$$

Damit ergibt sich die 3. Variante (***)

$$\frac{1}{c^2} \ddot{\vec{E}} - \Delta \vec{E} = 0$$

$$\frac{1}{c^2} \ddot{\vec{B}} - \Delta \vec{B} = 0$$

unter Bed. (MWG) $\vec{\nabla} \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \dot{\vec{E}} = 0$$

Unter den 3 Varianten die die freien elektromagnetischen Wellen beschreiben (*/**/***)

stellt die Potentialvariante mit der Coulombbeziehung offensichtlich die optimale dar.

⇒ untersuchen im folgenden

$$\frac{1}{c^2} \ddot{\vec{A}} - \Delta \vec{A} = 0 \quad (\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0)$$

daraus ergeben sich die Felder als

$$\vec{E} = -\dot{\vec{A}} - \underbrace{\vec{\nabla} \varphi}_0 = -\dot{\vec{A}}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Der einfachste Fall der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen im Vakuum wird durch (Überlagerung) ebener Wellen beschrieben:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{a}(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

offensichtlich gilt für ebene Wellen:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = i\vec{k} \cdot \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = i\vec{k} \times \vec{A}$$

$$\Delta \vec{A} = -k^2 \vec{A}$$

Durch Einsetzen des ebenen-Wellen-Ansatzes in die Wellengleichung ergibt sich:

$$\frac{1}{c^2} \ddot{\vec{A}} - \Delta \vec{A} = 0$$

$$-\frac{\omega^2}{c^2} \vec{A} + k^2 \vec{A} = 0$$

Damit ergibt sich die Dispersionsrelation (für $\omega > 0$)

$$\omega = k \cdot c$$

Nach der Coulombbeziehung gilt:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 = i\vec{k} \cdot \vec{A}$$

$$\Rightarrow \vec{A} \perp \vec{k} \quad d.h. \quad \vec{a}(\vec{k}) \perp \vec{k}$$

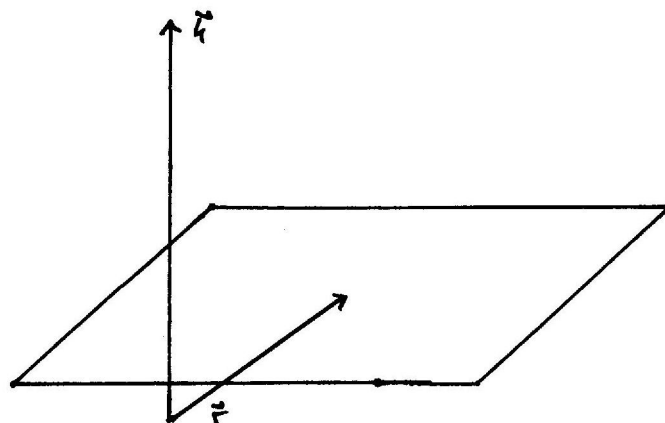
Der Vektor $\vec{a}(\vec{k})$ steht senkrecht zum Wellenzahlvektor in einer Ebene, welche von $\vec{e}_\sigma(\vec{k})$ für $\sigma = 1; 2$ aufgespannt werde. D.h.

$$\vec{a}(\vec{k}) = \sum_1^2 a_\sigma(\vec{k}) \vec{e}_\sigma(\vec{k}) \quad \text{mit} \quad \vec{e}_\sigma(\vec{k}) \perp \vec{k}$$

Für gegebenes t ist

$$\vec{A} = \vec{a}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{r} - \omega t}$$

konstant, wenn das Skalarprodukt $\vec{k} \cdot \vec{r}$ konstant ist, d.h. $\vec{A}$ ist konstant auf einer Ebene, welche senkrecht zu $\vec{k}$ ist (Ebene $\perp \vec{k}$). Flächen mit $\vec{A} = \text{const.}$ werden Wellenfronten genannt.

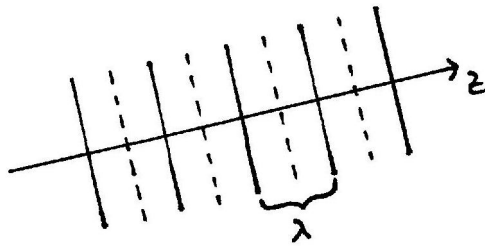


Sei speziell $\vec{k} \parallel \vec{e}_z$, dann gilt $\vec{k} \cdot \vec{r} = k \cdot z$. Wellenfronten längs z sind räumlich periodisch.

$$\begin{aligned} \vec{A}(z + \lambda) &\stackrel{!}{=} \vec{A}(z) \\ \Rightarrow e^{i\lambda k} &\stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow \lambda k = 2\pi \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für die Wellenlänge λ :

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$



Für gegebenes $\vec{r}$ ist $\vec{A}$ periodisch in der Zeit:

$$\begin{aligned}\vec{A}(t+T) &\stackrel{!}{=} \vec{A}(t) \\ \Rightarrow e^{i\omega T} &\stackrel{!}{=} 1\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Periode T :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Mit $\omega = k \cdot c$ folgt:

$$T = \frac{2\pi}{k \cdot c} = \frac{\lambda}{c}$$

Für die Frequenz ν gilt:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{c}{\lambda}$$

Wir betrachten eine Wellenfront bei (z, t) . Zum späteren Zeitpunkt $t + \Delta t$ ist diese Wellenfront bei $z + \Delta z$, d.h.:

$$e^{i(kz - \omega t)} \stackrel{!}{=} e^{i(k(z + \Delta z) - \omega(t + \Delta t))}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}k\Delta z &= \omega\Delta t \\ \frac{\Delta z}{\Delta t} &= \frac{\omega}{k} = \frac{k \cdot c}{k} = c\end{aligned}$$

D.h. die Wellenfronten bewegen sich mit einer Geschwindigkeit von c in Richtung $\vec{k}$. c wird als “Phasengeschwindigkeit“ bezeichnet.

Jetzt gehen wir vom Vektorpotential zu den Feldern:

$$\vec{E} = -\dot{\vec{A}} = i\omega\vec{A}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = i\vec{k} \times \vec{A}$$

D.h. $\vec{E}$ und $\vec{B}$ ebenfalls in Form von ebenen Wellen.

$$\vec{B} = i\vec{k} \times \underbrace{\vec{A}}_{\frac{\vec{E}}{i\omega}} = \frac{1}{\omega}\vec{k} \times \vec{E} = \underbrace{\frac{k}{\omega}}_{\frac{1}{c}} \frac{\vec{k}}{k} \times \vec{E}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\vec{k}}{k} \times \vec{E}$$

Die Vektoren $\vec{k}$, $\vec{E}$ und $\vec{B}$ einer ebenen elektromagnetischen Welle stehen senkrecht aufeinander und bilden ein rechtshändiges Dreibein.

Wegen der Linearität der Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2}\ddot{\vec{A}} - \Delta\vec{A} = 0$$

ist jede Linearkombination von transversalen, monochromatischen ebenen Wellen, welche die Dispersionsrelation $\omega = k \cdot c$ erfüllen, Lösung.

Eine allgemeine Lösung können wir daher in folgender Form angeben:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\sigma=1}^2 \int d^3\vec{k} a_{\sigma}(\vec{k}) \vec{e}_{\sigma}(k) e^{i(\vec{k}\vec{r} - kct)} + c.c.$$

D.h. wir können beliebige elektromagnetische Wellenpakete im leeren Raum als Fourier-Entwicklung darstellen.

Mit

$$\vec{E} = i\omega\vec{A}$$

$$\vec{B} = i\vec{k} \times \vec{A}$$

folgen die Fourierdarstellungen des $\vec{E}$ - und $\vec{B}$ -Feldes

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = i \sum_{\sigma=1}^2 \int d^3\vec{k} \, k c \, a_{\sigma}(\vec{k}) \vec{e}_{\sigma}(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{r}-kct)} + c.c.$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = i \sum_{\sigma=1}^2 \int d^3\vec{k} \, a_{\sigma}(\vec{k}) \vec{k} \times \vec{e}_{\sigma}(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{r}-kct)} + c.c.$$

Bemerkung:

- Zu den obigen Darstellungen von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ wären wir auch unter Zugrundelegung der Lorentz-Eichung gekommen, aber $\vec{A}$ hätte sich nicht auf eine Ebene $\perp \vec{k}$ beschränkt.
- Polarisationszustände

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = a(\vec{k}) \vec{e}_{\sigma}(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$$

heißen linear polarisiert.

Die allgemeinste ebene Welle ist eine Überlagerung zweier linear polarisierter Wellen:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \left[a_1(\vec{k}) \vec{e}_1(\vec{k}) + a_2(\vec{k}) \vec{e}_2(\vec{k}) \right] e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} \quad \text{mit} \quad a_{1,2}(\vec{k}) \in \mathbb{C}$$

$$a_{\sigma}(\vec{k}) = \left| a_{\sigma}(\vec{k}) \right| e^{i\delta_{\sigma}(\vec{k})}$$

- falls $\delta_1(\vec{k}) = \delta_2(\vec{k})$ dann handelt es sich um eine linear polarisierte Welle
- Sind die Phasen unterschiedlich, so handelt es sich um elliptisch polarisierte Wellen
- Spezialfall: zirkular polarisierte Wellen für

$$a_1(\vec{k}) = a(\vec{k})$$

$$a_2(\vec{k}) = a(\vec{k}) e^{\pm i\frac{\pi}{2}}$$

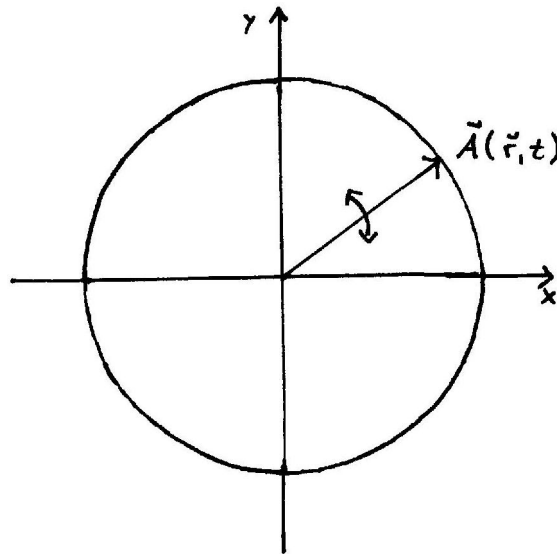
Damit ergibt sich:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \left[\vec{e}_1(\vec{k}) \pm i\vec{e}_2(\vec{k}) \right] a(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$$

Somit ergibt sich für die x,y-Komponente des reellen Potentials:

$$A_x(\vec{r}, t) = |a(\vec{k})| \cos(kz - \omega t + \delta)$$

$$A_y(\vec{r}, t) = \mp |a(\vec{k})| \sin(kz - \omega t + \delta)$$



Energiestrom assoziiert mit elektromagnetischer Welle

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \vec{E}(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t)} + c.c.$$

Das dazugehörige $\vec{B}$ -Feld erfüllt:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}(\vec{r}, t)$$

Für die Dichte der magnetischen Feldenergie gilt:

$$w_{mag} = \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 = \frac{1}{2\mu_0} \frac{1}{\omega^2} (\vec{k} \times \vec{E}) \cdot (\vec{k} \times \vec{E})$$

mit

$$(\vec{k} \times \vec{E}) \cdot (\vec{k} \times \vec{E}) = \epsilon_{ilm} k_l E_m \epsilon_{ijk} k_j E_k$$

$$= \epsilon_{ilm} \epsilon_{ijk} k_l E_m k_j E_k$$

mit $\epsilon_{ilm}\epsilon_{ijk} = \delta_{lj}\delta_{mk} - \delta_{lk}\delta_{mj}$ folgt

$$\begin{aligned}\epsilon_{ilm}\epsilon_{ijk}k_lE_mk_jE_k &= k_jk_jE_kE_k - k_kE_kk_mE_m \\ &= \vec{k}^2\vec{E}^2 - \underbrace{(\vec{k} \cdot \vec{E})^2}_{=0 \text{ (transversale Wellen)}}\end{aligned}$$

folgt:

$$\begin{aligned}w_{mag} &= \frac{1}{2\mu_0} \underbrace{\frac{1}{\omega^2}}_{=k^2c^2} k^2 E^2 \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \mu_0 \epsilon_0 \vec{E}^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 = w_{el}\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$w = w_{el} + w_{mag} = \epsilon_0 \vec{E}^2$$

D.h. die magnetische und elektrische Energiedichte sind gleich groß. Dies gilt natürlich auch für die zeitlich gemittelten Größen:

$$\langle w \rangle = \langle w_{el} \rangle + \langle w_{mag} \rangle = \epsilon_0 \langle \vec{E}^2 \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 |E(k)|^2$$

Poynting-Vektor:

$$\begin{aligned}\vec{S} &= \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0 \omega} \vec{E} \times (\vec{k} \times \vec{E}) \\ &= \frac{1}{\mu_0 \omega} \left[\vec{k} \vec{E}^2 - \underbrace{\vec{E} \vec{k} \cdot \vec{E}}_{=0} \right] \\ &= \frac{1}{\mu_0 \omega} \vec{k} \vec{E}^2 \\ &= \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \vec{E}^2 \cdot \frac{\vec{k}}{k} \\ &= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}}_{=c} \underbrace{\epsilon_0 \vec{E}^2}_w \cdot \frac{\vec{k}}{k} = cw \frac{\vec{k}}{k}\end{aligned}$$

Im zeitlichen Mittel gilt:

$$\langle S \rangle = c \langle w \rangle \frac{\vec{k}}{k} = \frac{1}{2} c \epsilon_0 |E(k)|^2 \frac{\vec{k}}{k}$$

D.h. der Poynting-Vektor zeigt in Richtung des Wellenzahlvektors. In dieser Richtung findet ein Energiestrom statt, dessen Dichte proportional zur Energiedichte der Welle ist.

5.4 Transparente lineare Medien

Bisher Vakuum, d.h.

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu_0 \vec{H}\end{aligned}$$

Wir betrachten jetzt ein transparentes, lineares Medium, d.h.

$$\begin{aligned}\vec{D}(\omega) &= \epsilon(\omega) \vec{E}(\omega) \\ \vec{B}(\omega) &= \mu(\omega) \vec{H}(\omega)\end{aligned}$$

mit $\epsilon(\omega), \mu(\omega) \in \mathbb{R}$

Alle bisher abgeleiteten Ergebnisse bleiben richtig unter der Ersetzung von:

$$\begin{aligned}\epsilon_0 &\rightarrow \epsilon(\omega) \\ \mu_0 &\rightarrow \mu(\omega)\end{aligned}$$

Insbesondere gilt für die im Vakuum als Phasengeschwindigkeit fungierende Lichtgeschwindigkeit

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \rightarrow v(\omega) = \frac{c}{n(\omega)}$$

wobei $v(\omega)$ als frequenzabhängige Phasengeschwindigkeit bezeichnet wird mit der Brechzahl $n(\omega)$

$$n(\omega) = \sqrt{\frac{\epsilon(\omega)\mu(\omega)}{\epsilon_0\mu_0}} = \sqrt{\epsilon_r(\omega)\mu_r(\omega)}$$

Aus der Dispersionsrelation $\omega = kc$ wird:

$$\omega = \frac{k}{\sqrt{\epsilon(\omega)\mu(\omega)}} = kv(\omega)$$

Wir betrachten jetzt einen Transparenzbereich $\Delta\omega$ um die Mittenfrequenz ω_0

$$|\omega_0 - \omega| \leq \Delta\omega$$

Die nach obiger Dispersionsrelation zugehörigen Wellenzahlvektoren sollen folgende Bedingung erfüllen

$$|k_0 - k| \leq \Delta k$$

Die Überlagerung von ebenen Wellen aus diesem Frequenzgebiet liefert Wellenpakete

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\sigma=1}^2 \int_{\Delta k} d^3\vec{k} a_{\sigma}(\vec{k}) \vec{e}_{\sigma}(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega(k)t)} + c.c.$$

wobei gilt

$$a_{\sigma}(k) = 0 \quad \text{für} \quad |k - k_0| > \Delta k$$

Im Unterschied zu früher ist die Phasengeschwindigkeit

$$v(\omega) = \frac{\omega(k)}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon(\omega)\mu(\omega)}}$$

Diese ist jetzt frequenzabhängig, d.h. die Wellenfronten von Wellen unterschiedlicher Frequenzen breiten sich im allgemeinen mit unterschiedlicher Geschwindigkeit aus.

$\Rightarrow$ lokalisierte Wellenpakete ändern ihre Form und laufen auseinander

Wir betrachten speziell ein Gaußsches Wellenpaket, das sich entlang z bewegt:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \int_0^{\infty} d^3k \vec{a}(k) e^{i(kz - \omega(k)t)} + c.c.$$

mit

$$\vec{a}(k) = \vec{a}(k_0) e^{-\frac{(k-k_0)^2}{4(\Delta k)^2}}$$

Wir machen die Taylorentwicklung von $\omega(k)$

$$\omega(k) = \omega(k_0) + \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} (k - k_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\omega}{dk^2} \right|_{k_0} (k - k_0)^2 + \dots$$

und werten das Integral aus

$$\vec{A}(r, t) \sim \frac{\vec{a}(k_0)}{b(t)} e^{-\frac{\left(z - \frac{d\omega}{dk} \big|_{k_0} \cdot t\right)^2}{b(t)^2}}$$

mit

$$b(t) = \sqrt{\frac{1}{(\Delta k)^2} + 2i \frac{d^2\omega}{dk^2} \big|_{k_0} \cdot t}$$

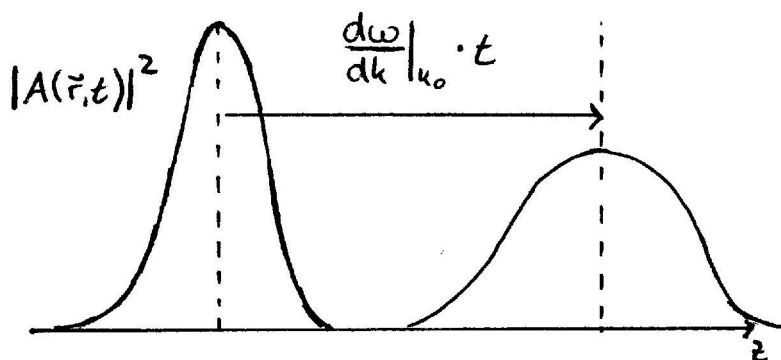
d.h. das Wellenpaket läuft mit der Zeit breit, abhängig von

$$\frac{d^2\omega}{dk^2} \big|_{k_0}$$

und das Maximum des Wellenpaketes breitet sich mit der Geschwindigkeit

$$\frac{d\omega}{dk} \big|_{k_0}$$

entlang z aus.



Wir definieren sinnvollerweise eine Gruppengeschwindigkeit

$$v_g(\omega) = \frac{d\omega}{dk}$$

v_g bestimmt die Geschwindigkeit, mit der Signale übertragen werden können.

5.5 Erzeugung elektromagnetischer Wellen

Bisher haben wir die Lösungen der homogenen MWG ($\rho = 0 = \vec{j}$) diskutiert, d.h. freie Wellen. Jetzt untersuchen wir im folgenden den Einfluß von Ladungen und Strömen im Endlichen.

Die inhomogene Potentialgleichungen wurden in Kapitel (5.2) diskutiert :

$$\frac{1}{c^2} \ddot{\vec{A}} - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j}_\perp \quad (\text{Coulombeichung})$$

mit

$$\begin{aligned} \vec{j}_\perp &= \vec{j} - \vec{j}_\parallel \\ \vec{j}_\parallel &= \epsilon_0 \vec{\nabla} \dot{\varphi} \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \ddot{\varphi} - \Delta \varphi &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (\text{Lorentzgleichung}) \\ \frac{1}{c^2} \ddot{\vec{A}} - \Delta \vec{A} &= \mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

Wir betrachten zunächst die Coulombeichung; $f(\vec{r}, t)$ sei eine Komponente von $\vec{A}(\vec{r}, t)$ und $s(\vec{r}, t)$ sei eine Komponente von $\mu_0 \vec{j}_\perp(\vec{r}, t)$. Analog ist dieses Vorgehen auch für die Lorentzgleichung möglich.

In jedem Fall kommen wir auf eine partielle DGL der Form:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(\vec{r}, t) - \Delta f(\vec{r}, t) = s(\vec{r}, t)$$

$G^{(0)}(\vec{r}, t)$ sei die Greenfunktion dieses Problems, d.h. erfülle:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} G^{(0)}(\vec{r}, t) - \Delta G^{(0)}(\vec{r}, t) = \delta(\vec{r}) \delta(t) \quad (*)$$

Dann kann f dargestellt werden über $G^{(0)}$ und s durch:

$$f(\vec{r}, t) = \int d^3 \vec{r}' \int dt' G^{(0)}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') s(\vec{r}', t') \quad (**)$$

Bemerkung:

Beweis klar, wenden $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ auf die Gleichung an:

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right\} f(r, t) &= \int d^3 \vec{r}' \int dt' \{...\} G^{(0)}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') s \\ &= \int d^3 \vec{r}' \int dt' \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t') s \\ &= s(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

d.h. die Identität wurde gezeigt.

$\delta(\vec{r})$ ist kugelsymmetrisch, d.h. es sollte auch $G^{(0)}(\vec{r})$ kugelsymmetrisch sein, d.h. $G^{(0)}(\vec{r}, t) = G^{(0)}(r, t)$ mit $r = |\vec{r}|$

$\Rightarrow$ Wir lösen (*) in Kugelkoordinaten.

Wir betrachten den radialen Anteil von Δ

$$\Delta \rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r$$

damit ergibt sich (*) zu

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} [r G^{(0)}(r, t)] - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} G^{(0)}(r, t) = 0$$

Mit dem Ansatz $G^{(0)}(r, t) = \frac{1}{r} g(r, t)$ folgt:

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} g(r, t) = 0$$

Dies wird gelöst durch eine beliebige Funktion $g(t \pm \frac{r}{c})$. Damit ergibt sich

$$G^{(0)}(\vec{r}, t) = \frac{1}{r} g(t \pm \frac{r}{c})$$

Wir müssen g so wählen, daß (*) erfüllt wird. Dazu integrieren wir (*) über ein Kugelvolumen, das den Ursprung enthält.

$$\int_V d^3 \vec{r} \left\{ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G^{(0)}}{\partial t^2} - \Delta G^{(0)} \right\} = \delta(t) \underbrace{\int_V d^3 \vec{r} \delta(\vec{r})}_1$$

Unter Ausnutzung des Gaußschen Satzes folgt:

$$\frac{1}{c^2} \int_V d^3\vec{r} \frac{\partial^2 G^{(0)}}{\partial t^2} - \int_{(V)} d\vec{a} \cdot \vec{\nabla} G^{(0)} = \delta(t)$$

Wir lassen jetzt den Radius R des Kugelvolumens V gegen Null gehen; g sei endlich.

$$G^{(0)} \sim \frac{1}{r} g$$

d.h.

$$\frac{1}{c^2} \int_V d^3\vec{r} \frac{\partial^2 G^{(0)}}{\partial t^2} \xrightarrow{R \rightarrow 0} 0 \quad (da \ V \sim r^3)$$

$$\vec{\nabla} G = g \underbrace{\vec{\nabla} \frac{1}{r}}_{-\frac{\vec{e}_r}{r^2}} + \frac{1}{r} \vec{\nabla} g$$

Bei $-\frac{\vec{e}_r}{r^2}$ handelt es sich um den nicht verschwindenden Beitrag zum Oberflächenintegral.

$$\int_{(V)} d\vec{a} \cdot \vec{\nabla} G^{(0)} \xrightarrow{R \rightarrow 0} -4\pi g(t) \quad (da \ (V) = 4\pi R^2)$$

d.h. insgesamt gilt $g(t) = \frac{1}{4\pi} \delta(t)$. Damit ergeben sich zwei mögliche Greenfunktionen:

- die retardierte Greenfunktion

$$G_R^{(0)}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi r} \delta\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

- die avancierte Greenfunktion

$$G_A^{(0)}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi r} \delta\left(t + \frac{r}{c}\right)$$

Aus (**) folgen dann das retardierte Vektorpotential in Coulombbeziehung

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \frac{\vec{j}_\perp(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

bzw. das retardierte Vektorpotential in Lorentzbeziehung:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

das retardierte skalare Potential in Lorentzzeichnung:

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Interpretation der retardierten Potentiale

An einem Beobachtungspunkt $\vec{r}$ zu einer Zeit t werden die Quellverteilungen am Ort $\vec{r}'$ zum früheren Zeitpunkt $t' = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}$ registriert.

⇒ Die Wirkung eines Quellpunktes ist nicht momentan, sondern mit Lichtgeschwindigkeit verzögert.

Analog ergeben sich durch Einsetzen der avancierten Zeit $t' = t + \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}$ die avancierten Potentiale.

Hier ist die Interpretation scheinbar schwieriger, da diese nicht mit dem Kausalitätsprinzip übereinstimmen. Allerdings wirken die Felder (über die Lorentzsche Kraftdichte) auf die Quellen selbst zurück. In diesem Sinne kann mittels der avancierten Potentiale aus den Quellverteilungen zum Zeitpunkt $t' = t + \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}$ auf die Felder am Beobachtungspunkt $\vec{r}$ zum Zeitpunkt t geschlossen werden.

Beispiel: Bewegte Punktladungen

Punktladungen bewegen sich längs einer Bahnkurve $\vec{s}(t)$

$$\begin{aligned}\rho(\vec{r}, t) &= q\delta(\vec{r} - \vec{s}(t)) \\ \vec{j}(\vec{r}, t) &= q \cdot \dot{\vec{s}}(t)\delta(\vec{r} - \vec{s}(t))\end{aligned}$$

Vorhin wurden die Potentiale über die Greensche Funktion dargestellt als

$$f(\vec{r}, t) = \int d^3\vec{r}' \int dt' G^{(0)}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') s(\vec{r}', t')$$

mit

$$G_R^{(0)}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi r} \delta(t - \frac{r}{c})$$

folgt für

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dt' \int d^3\vec{r}' \frac{\delta(t - t' - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \rho(\vec{r}', t') \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \int dt' \frac{\delta(t - t' - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta(\vec{r}' - \vec{s}(t))\end{aligned}$$

Wir führen zunächst eine räumliche Integration aus

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int dt' \frac{\delta(t - t' - \frac{|\vec{r} - \vec{s}(t')|}{c})}{|\vec{r} - \vec{s}(t')|}$$

Bemerkung:

Es gilt, falls $f(x)$ γ einfache Nullstellen hat:

$$\delta(f(x)) = \sum_{\gamma} \left| \left(\frac{df}{dx} \right)_{x=x_{\gamma}} \right|^{-1} \delta(x - x_{\gamma})$$

Wobei die x_{γ} die einfachen Nullstellen der Funktion $f(x)$ sind, d.h. $f(x_{\gamma}) = 0$.

Anwenden auf

$$\begin{aligned}f(\vec{r}, t') &= t - t' - \frac{|\vec{r} - \vec{s}(t')|}{c} \\ \frac{\partial f(\vec{r}, t')}{\partial t'} &= -1 + \frac{(\vec{r} - \vec{s}(t'))}{|\vec{r} - \vec{s}(t')|} \cdot \dot{\vec{s}}(t') \cdot \frac{1}{c} \\ &= -1 + \underbrace{\frac{(\vec{r} - \vec{s}(t'))}{|\vec{r} - \vec{s}(t')|} \cdot \frac{\dot{\vec{s}}(t')}{|\dot{\vec{s}}(t')|}}_{-1 \dots +1} \cdot \underbrace{\frac{|\dot{\vec{s}}(t')|}{c}}_{<1}\end{aligned}$$

Es gilt $\frac{|\dot{\vec{s}}(t')|}{c} < 1$ da die Teilchen langsamer als Licht sind. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\Rightarrow \dot{f} &< 0 \\ \Rightarrow |\dot{f}| &= -\dot{f}\end{aligned}$$

d.h.

$$\delta\left(t - t' - \frac{|\vec{r} - \vec{s}(t')|}{c}\right) = \frac{\delta(t' - t_{ret})}{1 - \frac{(\vec{r} - \vec{s}(t_{ret})) \cdot \dot{\vec{s}}(t_{ret})}{|\vec{r} - \vec{s}(t_{ret})|} \cdot \frac{1}{c}}$$

mit der retardierten Zeit

$$t - t_{ret} - \frac{|\vec{r} - \vec{s}(t_{ret})|}{c} = 0$$

Die Zeitintegration führt auf das Liénard-Wiechert-Potential:

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{s}(t_{ret})| - (\vec{r} - \vec{s}(t_{ret})) \cdot \dot{\vec{s}}(t_{ret}) \cdot \frac{1}{c}}$$

wobei für die Retardierungsbedingung gilt:

$$t_{ret} = t - \frac{|\vec{r} - \vec{s}(t_{ret})|}{c}$$

Analoge Umformung für das Vektorpotential ergibt:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{q\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\vec{s}}(t_{ret})}{|\vec{r} - \vec{s}(t_{ret})| - (\vec{r} - \vec{s}(t_{ret})) \cdot \dot{\vec{s}}(t_{ret}) \cdot \frac{1}{c}}$$

Die praktische Auswertung ist wegen der Retardierungsbedingung im allgemeinen nicht trivial!

5.5.1 Multipolentwicklung

Wir betrachten das retardierte skalare Potential in der Lorentz-Eichung

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

In Kapitel (2.4) haben wir das statische Potential betrachtet

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

und für kleine $|\vec{r}'|$ den Nenner entwickelt:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{Q}{|\vec{r}|} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^3} + \dots \right\}$$

Jetzt wird es etwas komplizierter, da der Abstand $|\vec{r} - \vec{r}'|$ auch in der Retardierungszeit vorkommt. Es gilt

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{r}'|^{\pm 1} &= \left[(\vec{r} - \vec{r}')^2 \right]^{\pm \frac{1}{2}} \\ &= (r^2 - 2\vec{r}' \cdot \vec{r} + r'^2)^{\pm \frac{1}{2}} \\ &= r^{\pm 1} \left(1 - \frac{2\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2} \right)^{\pm \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Es gilt $\frac{r'}{r} < 1$. Wir entwickeln jetzt nach Potenzen von $\frac{r'}{r}$

$$\left(1 - \frac{2\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2} \right)^{\pm \frac{1}{2}} = 1 \mp \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^2} \dots$$

Damit ergibt sich:

$$\frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^2} \dots \right) \rho\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{1}{c} \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r} \dots \right)$$

Wir entwickeln jetzt die Ladungsdichte nach Potenzen von $\frac{r'}{r}$:

$$\rho\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{1}{c} \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r} \dots \right) = \rho\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c}\right) + \dot{\rho}\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c}\right) \frac{1}{c} \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r} \dots$$

Damit ergibt sich insgesamt

$$\frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} \left\{ \rho\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c}\right) + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^2} \left[\rho\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c}\right) + \frac{r}{c} \dot{\rho}\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c}\right) \right] \dots \right\}$$

Das Potential ergibt sich als

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \left\{ \int d^3\vec{r}' \rho\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c}\right) + \int d^3\vec{r}' \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^2} \left[\rho\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c}\right) + \frac{r}{c} \dot{\rho}\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c}\right) \right] + \dots \right\}$$

Analog ergibt sich das retardierte Vektorpotential als

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \left\{ \int d^3\vec{r}' \vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c}\right) + \int d^3\vec{r}' \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^2} \left[\vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c}\right) + \frac{r}{c} \dot{\vec{j}}\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c}\right) \right] \dots \right\}$$

Damit sind wir in der Lage für inselförmige Ladungs- und Stromverteilungen die Felder (in weiterer Entfernung $|\vec{r}| \gg |\vec{r}'|$) anzugeben.

5.5.2 Elektrische Dipolstrahlung

Mit

$$Q = \int d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}')$$

$$\vec{p} = \int d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}')\vec{r}'$$

(vgl. 2.4) lässt sich das skalare Potential aus (5.5.1) angeben als:

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\underbrace{\frac{1}{r} Q \left(t - \frac{r}{c} \right)}_{\varphi^{(0)}} + \underbrace{\frac{1}{r^3} \vec{r} \cdot \vec{p} \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{cr^2} \vec{r} \cdot \dot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right)}_{\varphi_d} \right]$$

wobei $\varphi^{(0)}$ als Monopolterm und φ_d als Dipolterm bezeichnet wird.

Wir betrachten jetzt das Vektorpotential. Der erste Term ist:

$$A^{(0)}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int d^3\vec{r}' \vec{j} \left(\vec{r}', t - \frac{r}{c} \right)$$

Früher (vgl. 3.2) haben wir schon ausgenutzt, daß folgendes gilt:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) \vec{r} &= \vec{r} \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t)}_{-\dot{\rho}(\vec{r}, t)} + \vec{j}(\vec{r}, t) \\ \Rightarrow \vec{j}(\vec{r}, t) &= \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) \vec{r} + \vec{r} \dot{\rho}(\vec{r}, t) \\ \Rightarrow \int d^3\vec{r}' \vec{j} \left(\vec{r}', t - \frac{r}{c} \right) &= \underbrace{\int d^3\vec{r}' \vec{\nabla} \cdot \vec{j} \left(\vec{r}', t - \frac{r}{c} \right) \vec{r}'}_{(1)} + \underbrace{\int d^3\vec{r}' \dot{\rho} \left(\vec{r}', t - \frac{r}{c} \right) \vec{r}'}_{(2)} \end{aligned}$$

Für (1) lässt sich zeigen, daß es für inselförmige Verteilungen verschwindet,

für (2) gilt:

$$\int d^3\vec{r}' \dot{\rho} \left(\vec{r}', t - \frac{r}{c} \right) \vec{r}' = \dot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right)$$

d.h. der erste Term in der Entwicklung des Vektorpotentials liefert uns bereits den (zur elektrischen) Dipolnäherung relevanten Beitrag.

$$\vec{A}_d(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right)$$

Bemerkung:

das dieser Term bereits ausreicht, wird auch dadurch gezeigt, daß er die Lorentz-Eichung erfüllt

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_d + \frac{1}{c^2} \dot{\varphi} = 0$$

$$\text{mit } \varphi_d(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r^3} \vec{r} \cdot \vec{p} \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{cr^2} \vec{r} \cdot \dot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right]$$

Mit

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}_d$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi_d - \dot{\vec{A}}_d$$

ergeben sich (nach länglicher Rechnung) die von einem (zeitlich veränderlichen) Dipol ausgehenden Felder

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\vec{r} \times \dot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r^3} + \frac{\vec{r} \times \ddot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right)}{cr^2} \right]$$

sowie

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{3\vec{r}\vec{r} \cdot \vec{p} \left(t - \frac{r}{c} \right) - r^2 \vec{p} \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r^5} + \frac{3\vec{r}\vec{r} \cdot \dot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) - r^2 \dot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right)}{cr^4} + \frac{\vec{r} \times \left[\vec{r} \times \ddot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right]}{c^2 r^3} \right\}$$

Bemerkung:

Für ein konstantes Dipolmoment $\dot{\vec{p}} = 0$ erhält man offensichtlich das bekannte elektrostatische Dipolfeld.

Die einzelnen Beiträge zum elektromagnetischen Feld klingen unterschiedlich schnell ab. Für große Entfernungen r ist das mit r^{-1} abklingende Fernfeld relevant

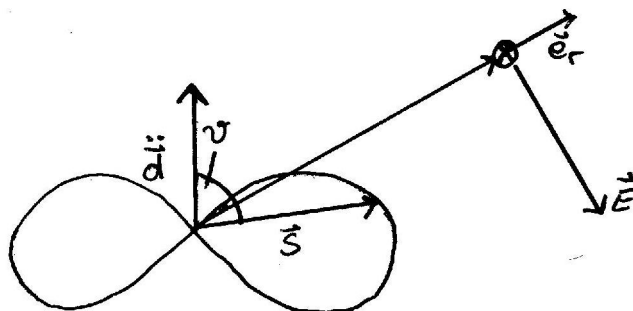
$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{r}, t) &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{\vec{r} \times \ddot{\vec{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r^2} \\ \vec{E}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{\vec{r} \times \left[\vec{r} \times \ddot{\vec{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]}{r^3}\end{aligned}$$

Bemerkung:

- Das Fernfeld ist proportional zu $\ddot{\vec{p}}$, d.h. es tritt nur für Ladungen auf, die eine beschleunigte Bewegung vollführen.
- offensichtlich gilt

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{c} \vec{e}_r \times \vec{E}(\vec{r}, t) \\ \vec{E}(\vec{r}, t) &= -c \vec{e}_r \times \vec{B}(\vec{r}, t)\end{aligned}$$

d.h. $\vec{B}$ und $\vec{E}$ stehen senkrecht aufeinander und senkrecht zur Ausbreitungsrichtung.



- Nur das Fernfeld gibt zur Energieabstrahlung Anlaß. Der hierfür relevante Poynting-Vektor ist

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{1}{(4\pi)^2 c^3 \epsilon_0} \frac{1}{r^2} \left| \frac{\vec{r}}{r} \times \ddot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right|^2 \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = S(r, t) \vec{e}_r \quad \text{mit}$$

$$S(r, t) = \frac{1}{(4\pi)^2 c^3 \epsilon_0} \frac{\ddot{\vec{p}}^2 \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r^2} \sin^2(\vartheta)$$

⇒ Richtwirkung von Antennen

- Die pro Zeiteinheit und Raumwinkel abgestrahlte Energie wird beschrieben durch

$$I = r^2 S$$

$$\Rightarrow I \sim \ddot{p}^2$$

Sei

$$p(t) = p_0 \sin(\omega t + \alpha)$$

$$\ddot{p}(t) = -\omega^2 p(t)$$

Daraus folgt:

$$I \sim \omega^4 p_0^2$$

D.h. hochfrequente elektromagnetische Wellen lassen sich durch Antennen besser abstrahlen als niederfrequente.

6 Kovariante Formulierung der Elektrodynamik

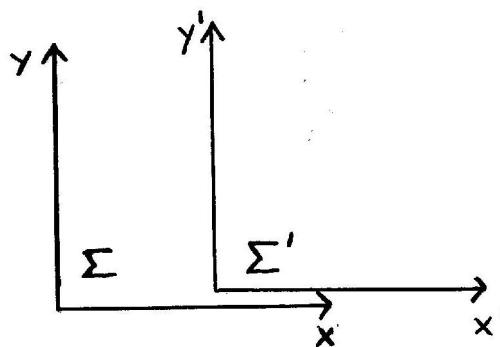
6.1 Lorentz-Transformation

Wir gehen von 2 Erfahrungen aus:

1. Alle Inertialsysteme sind gleichwertig, d.h. durch kein physikalisches Verfahren kann ein ausgezeichnetes Inertialsystem gefunden werden.
2. Die Vakuumlichtgeschwindigkeit ist in jedem Inertialsystem c .

Wir betrachten jetzt 2 Systeme Σ und Σ' , wobei sich das System Σ' relativ zum System Σ mit einer konstanten Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegt.

o.B.d.A $\vec{v} \parallel \vec{e}_x$



Aus diesen beiden Erfahrungen läßt sich die spezielle Lorentz-Transformation ableiten

$$\begin{aligned}
 x' &= \gamma(x - vt) \\
 t' &= \gamma\left(-\frac{\beta}{c}x + t\right) \\
 y' &= y \\
 z' &= z \\
 \text{mit } \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{v}{c}
 \end{aligned}$$

Für den Fall, dass $\vec{v}$ nicht parallel zu einer Koordinatenachse ist folgt die verallgemeinerte Lorentz-Transformation. Sei

$$\vec{r} = \vec{r}_\perp + \vec{r}_\parallel \quad \text{mit} \quad \vec{r}_\parallel \parallel \vec{r}_\perp$$

dann:

$$\begin{aligned}
 \vec{r}' &= \vec{r} + (\gamma - 1) \frac{\vec{v}\vec{v}}{v^2} \cdot \vec{r} - \gamma \vec{v}t \\
 t' &= \gamma \left(-\frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{c^2} + t \right)
 \end{aligned}$$

Bemerkung:

- Wir betrachten einen Stab mit der Länge l in Σ . Wir beobachten im Sytem Σ' das sich mit $\vec{v} \parallel \vec{e}_x$ bezüglich Σ bewegt, daß der Stab verkürzt erscheint

$$l' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} l$$

Der Effekt der Längenkontraktion ist natürlich symmetrisch. Ein Beobachter in Σ sieht einen in Σ' ruhenden Stab ebenfalls verkürzt.

$\Rightarrow$ gleichförmig bewegte Maßstäbe sind kürzer als ruhende $\rightarrow$ "Längenkontraktion"

- Wir betrachten den zeitlichen Abstand zweier Ereignisse in Σ (Periode einer Uhr) welcher Δt sein möge. Der Beobachter in Σ' (bewegt mit v bezüglich Σ) mißt den zeitlichen Abstand

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Auch dieser Effekt ist symmetrisch bezüglich der beiden Bezugspunkte.

$\Rightarrow$ gleichförmig bewegte Uhren gehen langsamer als ruhende $\rightarrow$ "Zeitdilatation"

6.2 Pseudoeuklidischer Raum

Wir vereinigen drei Komponenten des Ortsraumes mit Zeit t zu vierkomponentigen Vektoren x^μ bzw. x_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) mit den Definitionen

$$x^0 = ct$$

$$x^1 = x$$

$$x^2 = y$$

$$x^3 = z$$

bzw:

$$x_0 = ct$$

$$x_1 = -x$$

$$x_2 = -y$$

$$x_3 = -z$$

Offensichtlich hängen die kontravarianten Komponenten x^μ mit den kovarianten Komponenten x_μ über folgende Beziehung zusammen:

$$x^\mu = g^{\mu\gamma} x_\gamma$$

$$x_\mu = g_{\mu\gamma} x^\gamma$$

wobei der metrische Fundamentaltensor des 4D pseudoeuklidischen Raumes gemäß folgendem gegeben ist:

$$(g_{\mu\gamma}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (g^{\mu\gamma})$$

Die spezielle Lorentz-Transformation ergibt sich jetzt als:

$$\begin{aligned} x'^0 &= \gamma x^0 - \beta\gamma x^1 \\ x'^1 &= -\beta\gamma x^0 + \gamma x^1 \\ x'^2 &= x^2 \\ x'^3 &= x^3 \end{aligned}$$

und läßt sich in der Form

$$x'^\mu = \Lambda_\gamma^\mu x^\gamma$$

mit der Transformationsmatrix

$$(\Lambda_\gamma^\mu) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

darstellen.

Bemerkung: Über doppelt auftretende kontravariante und kovariante Indizes ist zu summieren.

Den Index γ im folgenden nicht mit der Zahl $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ verwechseln!

Die Transformation der kovarianten Komponenten ergibt sich zu

$$x'_\mu = \Lambda_\mu^\gamma x_\gamma$$

mit der Transformationsmatrix:

$$(\Lambda_\mu^\gamma) = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Offensichtlich gilt:

$$\Lambda_\mu^\nu = g_{\mu\lambda} \Lambda_\rho^\lambda g^{\rho\nu}$$

sowie

$$\Lambda_\nu^\mu \Lambda_\mu^\lambda = \delta_\nu^\lambda$$

wobei δ_γ^λ als Kroneckersymbol bezeichnet wird.

Die Lorentz-Transformation ist eine orthogonale Transformation. Damit gilt für das Skalarprodukt zweier Vierervektoren, daß sie unter der Lorentz-Transformation invariant ist:

$$a'^\mu b'_\mu = \underbrace{\Lambda_\gamma^\mu \Lambda_\mu^\lambda}_{\delta_\gamma^\lambda} a^\gamma b_\lambda = a^\lambda b_\lambda$$

Wir definieren die Viererableitungen:

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

bzw. $\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu}$

Es gilt

$$\partial'_\mu = \underbrace{\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\mu}}_{(\Lambda^{-1})_\mu^\gamma} \cdot \frac{\partial}{\partial x^\gamma}$$

wegen Orthogonalität

$$\Lambda_\gamma^\mu \Lambda_\mu^\lambda = \delta_\gamma^\lambda$$

folgt

$$(\Lambda^{-1})^\mu_\gamma = \Lambda^\mu_\gamma$$

und damit

$$\partial'_\mu = \Lambda^\gamma_\mu \partial_\gamma$$

analog gilt

$$\partial'^\mu = \Lambda^\mu_\gamma \partial^\gamma$$

Beispiel: Raum-Zeit-Abstand von Ereignissen

$x^{(1)\mu}$ und $x^{(2)\mu}$ seien die kontravarianten Koordinaten zweier Ereignisse in Σ . Wir definieren ihren Abstand als:

$$(\Delta s)^2 = \Delta x^\mu \Delta x_\mu$$

mit

$$\Delta x^\mu = x^{(1)\mu} - x^{(2)\mu}$$

Wie ist der Abstand dieser Ereignisse in Σ' ?

$$\begin{aligned} (\Delta s)^2 &= \Delta x'^\mu \Delta x'_\mu \\ &= \Lambda^\mu_\gamma \Delta x^\gamma \Lambda^\lambda_\mu \Delta x_\lambda \\ &= \underbrace{\Lambda^\mu_\gamma \Lambda^\lambda_\mu}_{\delta^\lambda_\gamma} \Delta x^\gamma \Delta x_\lambda \\ &= \Delta x^\lambda \Delta x_\lambda = (\Delta s)^2 \end{aligned}$$

D.h. wie bei einer Drehung im 3D-Raum, bei der der räumliche Abstand zweier Punkte unverändert bleibt, läßt die Lorentztransformation den Raum-Zeitabstand

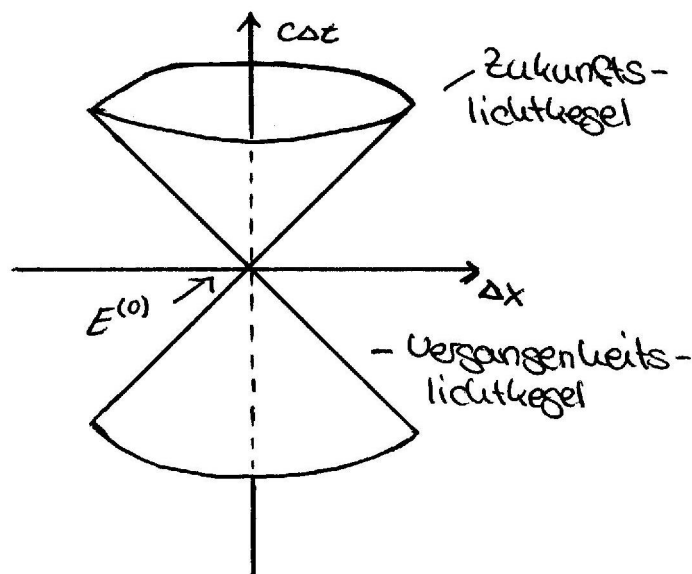
$$(\Delta s)^2 = c^2 \Delta t^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$$

konstant.

$$\Delta s = 0$$

$$\Rightarrow c\Delta t = \pm \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$$

Diese Gleichung definiert den sogenannten Lichtkegel zum Bezugseignis $E^{(0)}$.



Wir können die Ereignisse E bezüglich ihrer Lage zum Lichtkegel von $E^{(0)}$ klassifizieren:

- innerhalb eines Lichtkegels, raumartiger Abstand

$$(\Delta s)^2 < 0$$

- außerhalb des Lichtkegels, raumartiger Abstand

$$(\Delta s)^2 > 0$$

- auf dem Lichtkegel, lichtartiger Abstand

$$(\Delta s)^2 = 0$$

6.3 Elektromagnetische Felder

Wir kombinieren die Ladungsdichte ρ und die Stromdichte $\vec{j}$ zum "Viererstrom".

$$(j^\mu) = (c\rho, \vec{j}) \quad d.h. \quad j^0 = c\rho$$

Wir kombinieren das skalare Potential φ und das Vektorpotential $\vec{A}$ zum "Viererpotential"

$$(A^\mu) = \left(\frac{\varphi}{c}, \vec{A}\right) \quad d.h. \quad A^0 = \frac{\varphi}{c}$$

Damit ergibt sich die Kontinuitätsgleichung

$$\dot{\rho} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

in kovarianter Form

$$\partial_\mu j^\mu = \partial^\mu j_\mu = 0$$

Wir gehen in ein anderes Inertialsystem

$$\begin{aligned} \partial'_\mu &= \Lambda^\gamma_\mu \partial_\gamma \\ j'^\mu &= \Lambda^\mu_\rho j^\rho \\ \partial'_\mu j'^\mu &= \underbrace{\Lambda^\gamma_\mu \Lambda^\mu_\rho}_{\delta^\gamma_\rho} \partial_\gamma j^\rho \\ &= \partial_\rho j^\rho = 0 \end{aligned}$$

D.h. die Kontinuitätsgleichung gilt (wie erwartet) in jedem Inertialsystem.

Die Lorentz-Bedingung (5.2)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \dot{\varphi} = 0$$

lautet in kovarianter Form

$$\partial_\mu A^\mu = \partial^\mu A_\mu = 0$$

Der d'Alembert-Operator

$$\square \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$$

lautet in kovarianter Form:

$$\square = \partial^\mu \partial_\mu$$

Damit wird aus der inhomogenen Wellengleichung für das skalare Potential (vgl. 5.2)

$$\frac{1}{c^2} \ddot{\varphi} - \Delta \varphi = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

die folgende Gleichung

$$\square \frac{\varphi}{c} = \frac{1}{c\epsilon_0} \rho = \mu_0 c \rho \quad \left(c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \right)$$

$$\square A^0 = \mu_0 j^0$$

Wir können das mit der inhomogenen Potentialgleichung für das Vektorpotential

$$\frac{1}{c^2} \ddot{\vec{A}} - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

in kovarianter Form kombinieren zu

$$\partial^\gamma \partial_\gamma A^\mu = \mu_0 j^\mu$$

Aus dem skalaren und Vektorpotential φ und $\vec{A}$ lassen sich die $\vec{B}$ - und $\vec{E}$ -Felder ableiten

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi - \dot{\vec{A}}$$

In kovarianter Formulierung wird dieser Zusammenhang beschrieben durch:

$$F^{\mu\gamma} = \partial^\mu A^\gamma - \partial^\gamma A^\mu = -F^{\gamma\mu}$$

wobei $F^{\mu\gamma}$ der Feldstärkentensor ist. Mit dem metrischen Fundamentaltensor ($g_{\mu\gamma}$) kommt man zu

$$F_{\mu\gamma} = g_{\mu\lambda} g_{\gamma\tau} F^{\lambda\tau}$$

$$= \partial_\mu A_\gamma - \partial_\gamma A_\mu$$

Einsetzen und Nachrechnen führt zu:

$$(F^{\mu\gamma}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

bzw:

$$(F_{\mu\gamma}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Wir bilden Viererdivergenz des Feldstärkentensors:

$$\partial_\mu F^{\mu\gamma} = \underbrace{\partial_\mu \partial^\mu A^\gamma}_{(1)} - \underbrace{\partial_\mu \partial^\gamma A^\mu}_{(2)}$$

Für (1) gilt

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\gamma = \mu_0 j^\gamma$$

Dies ist die inhomogene Potentialgleichung.

Für (2) gilt:

$$\partial_\mu \partial^\gamma A^\mu = \partial^\gamma \underbrace{\partial_\mu A^\mu}_0$$

Es gilt $\partial_\mu A^\mu = 0$ aufgrund der Lorentz-Bedingung.

D.h.

$$\partial_\mu F^{\mu\gamma} = \mu_0 j^\gamma$$

Das ist jedoch genau die kovariante Form der inhomogenen MWG:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \dot{\vec{E}} = \mu_0 \vec{j}$$

Wegen der Antisymmetrie des Feldstärkentensors gilt

$$\partial_\lambda F_{\mu\gamma} + \partial_\mu F_{\gamma\lambda} + \partial_\gamma F_{\lambda\mu} = 0$$

Dies entspricht jedoch gerade den homogenen MWG:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

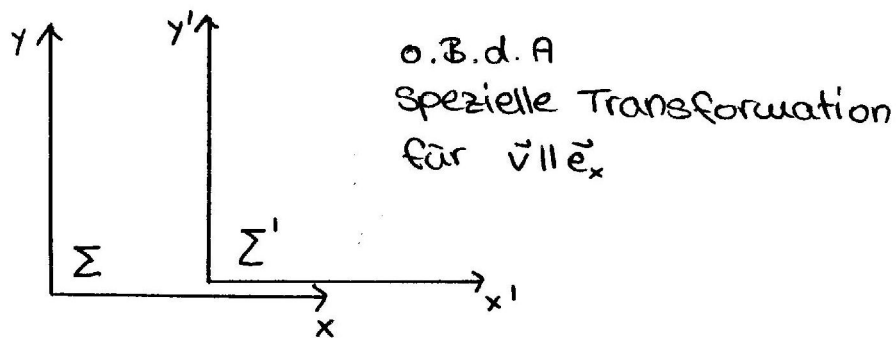
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0$$

Bemerkung:

Wir sind von den Potentialen in der Lorentz-Eichung, sowie von den Potentialgleichungen ausgegangen, um die Maxwellgleichungen in Viererform zu finden. Der umgekehrte Weg ist natürlich auch möglich.

Wir betrachten jetzt den Feldstärkentensor in 2 Inertialsystemen Σ und Σ' . Der Zusammenhang wird durch die Lorentz-Transformation vermittelt:

$$F'^{\mu\gamma} = \Lambda_\sigma^\mu \Lambda_\tau^\gamma F^{\sigma\tau}$$



d.h. (vgl 6.2)

$$(\Lambda_\gamma^\mu) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 F'^{\mu 0} &= \Lambda_{\sigma}^{\mu} \Lambda_{\tau}^0 F^{\sigma \tau} \\
 &= \Lambda_{\sigma}^{\mu} (\Lambda_0^0 F^{\sigma 0} + \Lambda_1^0 F^{\sigma 1}) \\
 &= \Lambda_{\sigma}^{\mu} (\gamma F^{\sigma 0} - \gamma F^{\sigma 1}) \\
 &= \gamma \Lambda_{\sigma}^{\mu} (F^{\sigma 0} - \beta F^{\sigma 1})
 \end{aligned}$$

Wir betrachten speziell die Komponenten des elektrischen Feldes $\mu = 1$:

$$\begin{aligned}
 F'^{10} &= \gamma [\Lambda_0^1 F^{00} + \Lambda_1^1 F^{10} - \beta \Lambda_0^1 F^{01} - \beta \Lambda_1^1 F^{11}] \\
 &= \gamma \left[-\beta \gamma \underbrace{F^{00}}_0 + \gamma F^{10} + \beta^2 \gamma F^{01} - \gamma \beta \underbrace{F^{11}}_0 \right] \\
 &= \gamma^2 F^{10} + \beta^2 \gamma^2 \underbrace{F^{01}}_{-F^{10}} \\
 &= \underbrace{\gamma^2 (1 - \beta^2)}_1 F^{10} \\
 &= F^{10}
 \end{aligned}$$

d.h.

$$E'_x = E_x$$

Analoge Rechnung für $\mu = 2$:

$$F'^{20} = \gamma(F^{20} - \beta F^{21})$$

d.h.

$$E'_y = \gamma(E_y - v B_z)$$

Für $\mu = 3$:

$$F'^{30} = \gamma(F^{30} - \beta F^{31})$$

d.h.

$$E'_z = \gamma(E_z - v B_y)$$

In kompakter Schreibweise läßt sich das zusammenfassen als:

$$\begin{aligned}\vec{E}'_{\parallel} &= \vec{E}_{\parallel} \\ \vec{E}'_{\perp} &= \gamma(\vec{E}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B})\end{aligned}$$

Analog können die Komponenten des $\vec{B}'$ -Feldes aus F'^{32} , F'^{13} und F'^{21} bestimmt werden. In kompakter Schreibweise ergibt sich:

$$\begin{aligned}\vec{B}'_{\parallel} &= \vec{B}_{\parallel} \\ \vec{B}'_{\perp} &= \gamma(\vec{B}_{\perp} + \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E})\end{aligned}$$

Offensichtlich ist die Bedeutung von elektrischen und magnetischen Feld relativ. Ruhende Ladungen stellen Quellen des $\vec{E}$ -Feldes dar. Da ein bewegter Beobachter bewegte Ladungen wahrnimmt, muß er Wirbel des $\vec{B}$ -Feldes registrieren.

Mit

$$\begin{aligned}\vec{E}'_{\perp} &= \vec{E} - \vec{E}_{\parallel} \\ \vec{E}'_{\parallel} &= \frac{\vec{v}\vec{v}}{v^2} \cdot \vec{E}\end{aligned}$$

und den analogen Formeln für das $\vec{B}$ -Feld kommen wir zu dem Transformationsverhalten:

$$\begin{aligned}\vec{E}' &= \gamma \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\vec{v}\vec{v}}{v^2} \cdot \vec{E} \right) \\ \vec{B}' &= \gamma \left(\vec{B} - \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\vec{v}\vec{v}}{v^2} \cdot \vec{B} \right)\end{aligned}$$

Der “Vermischung“ von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ -Feld entspricht eine “Vermischung“ von Ladungs- und Stromdichte. Aus

$$j'^{\mu} = \Lambda_{\gamma}^{\mu} j^{\gamma}$$

folgen die Transformationsgesetze:

$$\begin{aligned}\rho' &= \gamma \left(\rho - \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{j} \right) \\ \vec{j}' &= \gamma \left(\vec{j} - \vec{v} \rho \right)\end{aligned}$$

7 Anhang: Hamilton-Prinzip

Bisher sind wir von den MWG als den Grundpostulaten der Elektrodynamik ausgegangen. Diese spielen eine ähnliche Rolle, wie die Newtonschen Axiome in der TM. Ähnlich wie in der TM kann man auch in der ED einen Schritt weiter in der Abstraktion gehen und von einer Lagrange-Funktion starten, die auf der Grundlage des Hamiltonsprinzips die Feldgleichung in Form von Lagrange-Gleichungen liefert. Über die Beschreibung der Kräfte auf Ladungen und Strömen können wir ED und TM zu einer einheitlichen Theorie zusammenführen.

In der Punktmechanik enthält die Lagrange-Funktion als Funktion der (generalisierten) Koordinaten und Geschwindigkeiten die relevante Information über das System. In einer Feldtheorie tritt an ihre Stelle zunächst eine Lagrange-Dichte, wobei in der ED die Potentiale sowie ihre zeitlichen und räumlichen Ableitungen die Rolle der Variablen übernehmen, d.h.

- Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(A_\mu, \partial_\nu A_\mu)$$

- Lagrange-Funktional

$$\int d^4x \mathcal{L}$$

- Hamilton-Prinzip

$$\delta \int d^4x \mathcal{L} = 0$$

mit Randbedingung $\delta A_\gamma = 0$

Die entsprechenden Euler-Lagrange-Gleichungen lauten:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\gamma} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\gamma)} = 0$$

Sinnvolle Forderung an $\mathcal{L}$ ist sicher die Lorentz-Invarianz, d.h. wir suchen die Lagrange-

Dichte die ein Minkowski-Skalar ist.

Ein einfacher Ansatz der diese Forderung erfüllt

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu} F^{\mu\gamma} F_{\mu\gamma} - j^\mu A_\mu$$

Wir untersuchen die daraus folgenden Lagrange-Gleichungen (Erinnerung an 6.3. $F_{\sigma\tau} = \partial_\sigma A_\tau - \partial_\tau A_\sigma$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\gamma} &= -j^\gamma \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\gamma)} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\sigma\tau}} \cdot \frac{\partial F_{\sigma\tau}}{\partial(\partial_\mu A_\gamma)} \\ &= -\frac{1}{2\mu_0} F^{\sigma\tau} (\delta_\sigma^\mu \delta_\tau^\gamma - \delta_\tau^\mu \delta_\sigma^\gamma) \\ &= -\frac{1}{\mu_0} F^{\mu\gamma} \end{aligned}$$

d.h.

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\gamma)} = -\frac{1}{\mu_0} \partial_\mu F^{\mu\gamma}$$

Damit lauten die Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\gamma} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\gamma)} = -j^\gamma + \frac{1}{\mu_0} \partial_\mu F^{\mu\gamma} = 0$$

bzw.

$$\partial_\mu F^{\mu\gamma} = \mu_0 j^\gamma$$

Damit ergeben die Lagrange-Gleichungen gerade die inhomogenen MWG! Der Potentialansatz für den Feldstärkentensor sichert ohnehin die homogenen MWG (vgl. 6.3).

Damit können die MWG offensichtlich aus dem Hamiltonprinzip abgeleitet werden.

Bemerkung:

- Die Lagrangedichte des freien Feldes

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F &= -\frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\gamma} F_{\mu\gamma} \\ &= \frac{1}{2} (\epsilon_0 \vec{E}^2 - \mu_0^{-1} \vec{B}^2) \end{aligned}$$

entspricht physikalisch der Differenz aus elektrischer und magnetischer Energie.

- Wechselwirkungsterm

$$\mathcal{L}_W = -j^\mu A_\mu = -\rho\varphi + \vec{j} \cdot \vec{A}$$

- Die räumliche Integration der Lagrangedichte liefert die Lagrangefunktion

$$L = \int d^3\vec{r} \mathcal{L}$$

Mit dieser (unter Lorentz-Transformationen nicht invariant) Lagrange-Funktion kann das (invariante) Hamiltonprinzip in der aus der TM bekannten Form

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt L = 0$$

geschrieben werden.

Um die Dynamik der Feld-Teilchen-Wechselwirkung einzubeziehen, müssen wir die Lagrange-Funktion um einen die Teilchenbewegung beschreibenden Term ergänzen.

Speziell: Ein nichtrelativistisches Teilchen

Punktteilchen der Masse m und mit der Ladung q bewege sich entlang der Bahnkurve $\vec{s} = \vec{s}(t)$. Die Lagrange-Funktion des kräftefreien Teilchens ist die kinetische Energie.

$$L_T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{s}}^2$$

Für die Lagrange-Funktion des freien elektromagnetischen Feldes ergibt sich:

$$L_F = \int d^3\vec{r} \mathcal{L}_F \quad (\mathcal{L}_F = -\frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\gamma} F_{\mu\gamma})$$

Für Punktteilchen gilt:

$$\rho = q\delta(\vec{r} - \vec{s})$$

$$\vec{j} = q\dot{\vec{s}}\delta(\vec{r} - \vec{s})$$

Somit ergibt sich für den Wechselwirkungsterm

$$L_W = \int d^3\vec{r} \mathcal{L}_W$$

$$= \int d^3\vec{r} \left\{ -q\delta(\vec{r} - \vec{s})\varphi(\vec{r}) + q\dot{\vec{s}}\delta(\vec{r} - \vec{s})\vec{A} \right\}$$

$$L_W = -q\varphi(\vec{s}, t) + q\dot{\vec{s}} \cdot \vec{A}(\vec{s}, t)$$

Die Lagrange-Funktion für das aus elektromagnetischen Feld und Teilchen bestehende, gekoppelte Gesamtsystem ist dann

$$L = L_T + L_F + L_W$$

Es wurde bereits gezeigt, daß L die richtigen Feldgleichungen liefert. Liefert sie auch die korrekten Bewegungsgleichungen?

Wir untersuchen die Lagrange-Gleichungen für die Teilchenbewegung

$$\frac{\partial L}{\partial s^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}^i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3 \text{ für } x, y, z - \text{Komponenten})$$

$$\frac{\partial L}{\partial s^i} = -q \frac{\partial \varphi}{\partial s^i} + q\dot{\vec{s}} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial s^i}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{s}^i} = m\dot{s}_i + qA_i$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}^i} = m\ddot{s}_i + q \frac{dA_i}{dt} = m\ddot{s}_i + q \frac{\partial A_i}{\partial t} + q\dot{\vec{s}} \cdot \vec{\nabla} A_i$$

$$\underbrace{\frac{\partial L}{\partial s^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}^i}}_0 = q \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial s^i} - \frac{\partial A_i}{\partial t} + \dot{\vec{s}} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial s^i} - \dot{\vec{s}} \cdot \vec{\nabla} A_i \right) - m\ddot{s}_i$$

$$\Rightarrow m\ddot{s}_i = q \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial s^i} - \frac{\partial A_i}{\partial t} + \dot{\vec{s}} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial s^i} - \dot{\vec{s}} \cdot \vec{\nabla} A_i \right)$$

d.h. vektoriell ergibt sich die Gleichung:

$$m\ddot{\vec{s}} = q \left\{ \underbrace{-\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}_{\vec{E}} + \underbrace{\vec{\nabla}\vec{A} \cdot \dot{\vec{s}} - \dot{\vec{s}} \cdot \vec{\nabla}\vec{A}}_{\dot{\vec{s}} \times \underbrace{[\vec{\nabla} \times \vec{A}]}_{\vec{B}}} \right\}$$

$$m\ddot{\vec{s}}(t) = q\vec{E}(\vec{s}, t) + q\dot{\vec{s}} \times \vec{B}(\vec{s}, t)$$

d.h. unser Ansatz für die Lagrangedichte führt zur bekannten Newtonschen Bewegungsgleichung unter Einfluß der Lorentzkraft.

⇒ Mit Hilfe des Hamiltonprinzips können ED und TM auf eine gemeinsame theoretische Grundlage gestellt werden!