



Übungsblatt 5 - Korrekturen für das H-Atom

Abgabe: 14.05.2010 (bis 12:00 in Briefkasten auf N3)

Besprechung: 17.05.2010 und 19.05.2010

1. *Atomare Einheiten*

Die atomaren Einheiten (englisch: atomic units, a.u.) sind ein Einheitensystem, das hauptsächlich in der Atom- und Molekülphysik und der theoretischen Chemie benutzt wird. Die Definition ist gegeben durch die Reskalierung der folgenden vier Naturkonstanten:

$$e^2/4\pi\epsilon_0 = m_e = \hbar = 1$$

Berechnen Sie den zugehörigen SI-Wert zu 1 a.u. der Größen Länge, Energie, Zeit, Geschwindigkeit, Drehimpuls, Kraft, Temperatur, Druck und des elektrischen Feldes.

2. *Relativistisches Wasserstoffatom*

Für eine exakte relativistische Behandlung des Wasserstoffatoms ist die Dirac-Gleichung notwendig. Durch eine Reihenentwicklung des Dirac-Hamiltonoperators in Potenzen von $1/c$ erhält man

$$H = m_e c^2 + \underbrace{\frac{\mathbf{p}^2}{2m_e}}_{H_0} + V(r) - \underbrace{\frac{\mathbf{p}^4}{8m_e^3 c^2}}_{H_{mv}} + \underbrace{\frac{1}{2m_e^2 c^2} \frac{1}{r} \frac{dV(R)}{dR} \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}}_{H_{SB}} + \underbrace{\frac{\hbar^2}{8m_e^2 c^2} \Delta V(R)}_{H_D}$$

- (a) Interpretieren Sie die einzelnen Terme.
- (b) Berechnen Sie H_{mv}/H_0 unter Benutzung von $v/c \approx \alpha$
- (c) Berechnen Sie H_{SB}/H_0 wobei Sie die Ausdehnung des Wasserstoffatoms durch a_0 und die Drehimpulse durch $\hbar$ approximieren können.
- (d) Berechnen Sie Erwartungswert von H_D und teilen Sie diesen durch H_0 . (Sie können $|\psi_n(0)| \approx 1/\pi n^3 a_0^3$ benutzen.)

3. *Hyperfeinstruktur I*

Zum Spin $\mathbf{I}$ der Protons gehört ein Magnetisches Moment $\mathbf{M}_I$. Das gyromagnetische Verhältnis ist gegeben durch.

$$\mathbf{M}_I = g_P \mu_n \frac{\mathbf{I}}{\hbar}$$

mit dem Kernmagneton $\mu_n = q_P \hbar / 2M_P$. Unter Vernachlässigung der Dipol-Dipol Wechselwirkung zwischen den magnetischen Momenten von Elektron und Kern sowie des Kontakterms, kann die Hyperfeinwechselwirkung genähert werden durch

$$H_{\text{HF}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q}{m_e r^3} \mathbf{L} \cdot \mathbf{M}_I$$

Vergleichen Sie die Größenordnung dieses Terms mit H_{SB} .

4. **Hyperfeinstruktur II**

Die Energie der Hyperfein-Wechselwirkung ist gegeben durch

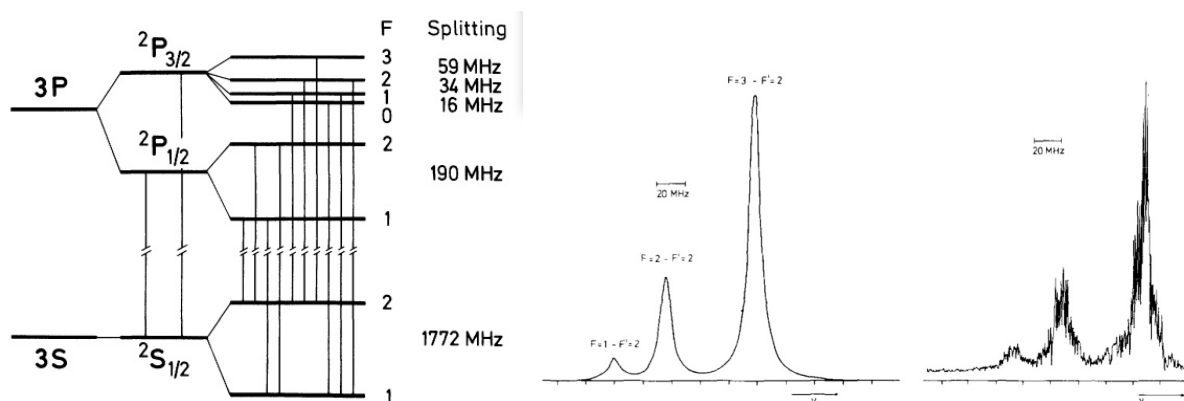
$$E_{\text{HFS}} = \frac{a}{2} [F(F+1) - I(I+1) - J(J+1)]$$

mit $F = |I - J|, \dots, I + J$ und der Hyperfeinstrukturkonstante $a = g_I \mu_n B_J / \sqrt{J(J+1)}$, wobei B_J das von der Elektronenhülle am Kernort erzeugte Magnetfeld ist.

- Berechnen Sie das Magnetfeld, das das 1s, 2s, 3s-Elektron des Wasserstoffatoms am Kernort hervorruft, mit Hilfe der von Fermi gefundenen Relation $a = \frac{2}{3} \mu_0 g_e \mu_B g_P \mu_n |\psi(0)|^2$ für s-Elektronen ($J = 1/2$).
- Schätzen Sie Magnetfeld unter Verwendung des Bohrschen Atommodells ab!
- Wie groß die Energiedifferenz (in cm^{-1} und MHz) für parallele und antiparallele Einstellung des Spins von Elektron und Proton in diesen Zuständen?

5. **Hyperfeinstruktur II!**

Der Kollimationswinkel eines Na-Atomstrahls sei $\varepsilon = 2^\circ$. Berechnen Sie die resultierende Dopplerverbreiterung für den Fall, dass der Laserstrahl für Anregungen in den $3P$ Zustand (D-Linie) senkrecht zum Atomstrahl steht!



W. Lange, J. Luther, B. Nottbeck, H. W. Schroeder, Opt. Commun. **8**, 157 (1973)

Wie groß darf ε maximal sein, um folgende Hyperfeinstrukturübergänge aufzulösen:

- $3^2P_{1/2}$ Zustand ($\Delta\nu_{\text{HFS}} = 190 \text{ MHz}$)
- $3^2P_{3/2}$ Zustand ($\Delta\nu_{\text{HFS}} = 16 \text{ MHz}, 34 \text{ MHz}, 59 \text{ MHz}$)