

Übungsblatt 9 Eindimensionale Probleme II

1. Bloch-Theorem (3P)

In einer eindimensionalen periodischen Struktur der Periode a muss die Aufenthaltswahrscheinlichkeit als beobachtbare Größe auch diese Periodizität aufweisen.

a.) Zeigen Sie, dass für die Wellenfunktion deshalb gelten muss

$$\psi(q + a) = e^{iKa} \psi(q) \quad \text{mit} \quad -\pi < Ka \leq \pi$$

b.) Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion geschrieben werden kann als (Bloch-Theorem)

$$\psi(q) = u_K(q) e^{iKa}; \quad u_K(q + a) = u_K(q)$$

2. Periodische Struktur (10P)

Gegeben Sei das eindimensionale Potential $V(x)$ mit der Potentiallänge $l = a + b$:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } q \in B_n \\ V_0 & \text{für } q \in C_n \end{cases}$$

mit $V_0 > 0$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ und

$$B_n = \{q; nl < q < nl + a\}$$

$$C_n = \{q; nl - b < q < nl\}$$

a.) Formulieren Sie für $0 < E < V_0$ einen passenden Ansatz für die Wellenfunktion.

b.) Reduzieren Sie die Anzahl der Bestimmungsgrößen auf vier durch Verwendung des Bloch-Theorems.

c.) Führen Sie periodische Randbedingungen ein:

$$\psi(q + Nl) = \psi(q)$$

d.) Nutzen Sie die Stetigkeitsbedingungen für ψ und ψ' , z.B. bei $q = 0$ und $q = a$, zur Ableitung einer Bestimmungsgleichung für die möglichen Energiewerte E aus c.) Diskutieren Sie, ob die Gleichung für alle Energien E lösbar ist. Geben Sie Beispiele für verbotene Energien an.

3. Lineare Operatoren

A, B, C seien lineare Operatoren. Beweisen Sie folgende nützliche Identitäten:

a.) $[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$

b.) $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$

c.) $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$

4. Lineare Operatoren

Der lineare Operator A befolge die Eigenwertgleichung:

$$A|a\rangle = a|a\rangle.$$

Der inverse Operator A^{-1} existiere. Zeigen Sie, dass er denselben Eigenzustand besitzt, und berechnen Sie den zugehörigen Eigenwert.