

Übungsblatt 12 Drehimpulse

1. Kugelförmiger Potentialtopf

Die zeitunabhängige Schrödingergleichung lautet laut Vorlesung in Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \Psi \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \Psi \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \Psi \right) + V(r) \Psi = E \Psi .$$

Betrachten Sie ein Teilchen, dass in einem kugelförmigen Potentialtopf mit $V(r) = 0$ für $r \leq r_0$ und $V(r) = \infty$ für $r > r_0$ befindet.

- (a) Zeigen Sie durch Einsetzen, daß die Wellenfunktion

$$\Psi(r) = \alpha \frac{\sin(kr)}{kr}$$

eine Lösung der Schrödingergleichung für dieses System ist und bestimmen Sie die Größen k und E .

- (b) Wie groß ist der Drehimpuls des Teilchens?
(c) Berechnen Sie den Erwartungswert des Abstands r des Teilchens vom Ursprung.

2. Vertauschungsrelationen des Drehimpulsoperators I

- (a) Die Komponenten des Drehimpulsoperators erfüllen für den Fall, dass i, j, k gerade Permutationen von 1,2,3 sind, die Vertauschungsrelation

$$\left[\hat{L}_i, \hat{L}_j \right] = i\hbar \hat{L}_k .$$

Zeigen Sie die Gültigkeit dieser Kommutatorrelation exemplarisch für $i = x, j = y$ und $k = z$.

- (b) Zeigen Sie exemplarisch für die z-Komponente, daß die Komponenten $\hat{L}_i$ des Drehimpulsoperators und das Quadrat $\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$ des Drehimpulsoperators der Vertauschungsrelation

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_i] = 0 \quad , \quad i = x, y, z$$

genügen.

3. Vertauschungsrelationen des Drehimpulsoperators II

Gegeben ist der Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(r) \text{ .}$$

Berechnen Sie den Kommutator der x-Komponente $\hat{L}_x$ des Drehimpulsoperators mit dem Hamiltonoperator $\hat{H}$, d.h. $[\hat{L}_x, \hat{H}]$.

4. Das Wasserstoffatom

Die Wellenfunktionen Ψ_{nlm} seien die Lösungen des Wasserstoffproblems.

- (a) Wie lauten bezüglich Ψ_{nlm} die Eigenwerte der Operatoren $\hat{H}, \hat{L}^2, \hat{L}_z$.
- (b) Die Hauptquantenzahl sei $n = 3$. Welche Werte kann l annehmen? Geben Sie zudem für jedes l die möglichen Werte von m an. Unter der Berücksichtigung des Elektronenspins kann jede Kombination nlm 2 mal besetzt werden. Wieviele Zustände kann folglich ein Elektron mit der Hauptquantenzahl $n = 3$ im Wasserstoffatom besetzen?
- (c) Berechnen Sie im Fall $l = 2$ den größten und den niedrigsten Erwartungswert des Operators $\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2$.