

$$a = c \cdot \cos(x)$$

$$b = c \cdot \sin(x)$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{b}{a}$$

$$\cotan(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{a}{b}$$

Intermezzo

Sterling-Formel

Es gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$\log(n!) = n \log(n) - n + \frac{1}{2} \log(n) + \frac{1}{2} \log(2\pi) + R_n,$$

$$\text{wobei } \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{n} - \frac{1}{120} \frac{1}{n^2} \leq R_n \leq \frac{1}{12} \frac{1}{n} + \frac{1}{120} \frac{1}{n^2}$$

nicht
abgeschrieben?

$$n! = \exp(n \log(n) - n + \frac{1}{2} \log(n) + \frac{1}{2} \log(2\pi) + R_n)$$

$$= \exp(n \log(n)) \exp(-n) \exp(\frac{1}{2} \log(n)) \exp(\frac{1}{2} \log(2\pi)) \exp(R_n)$$

$$= n^n e^{-n} \cdot n^{\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{1}{2}} e^{R_n}$$

$$= \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} e^{R_n}$$

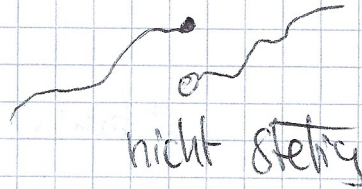
$$\exp(x \log(a)) = a^x$$

$$\text{Man schreibt oft } n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Beh: $\sqrt[n]{n!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$

Beweis: $\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{\left(\frac{n}{e}\right)^n \underbrace{\sqrt{2\pi n}}_{>1} \underbrace{e^{1/n}}_{>1}} > \sqrt[n]{\left(\frac{n}{e}\right)^n} = \frac{n}{e}$

Stetigkeit

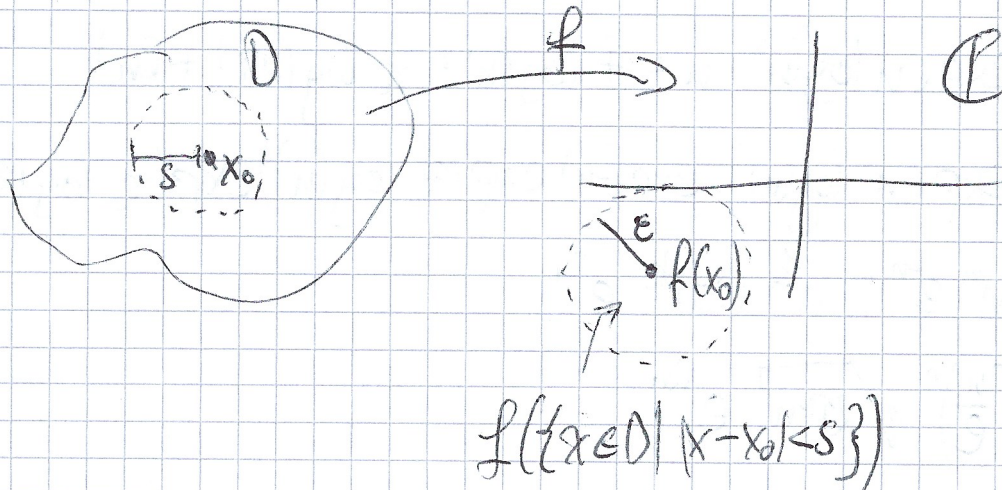


Def: Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ und sei $f: D \rightarrow \mathbb{C}$.

f ist stetig in einem Punkt $x_0 \in D$,
wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt,
so dass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit
 $|x - x_0| < \delta$

d.h.: f ist stetig in x_0 , wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$



Beispiel $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}; z \mapsto z^2$ ist in jedem $z_0 \in \mathbb{C}$ stetig.

Beweis: Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ Sei $\varepsilon > 0$ beliebig
Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt: $|f(z) - f(z_0)| = |z^2 - z_0^2|$

$$= |(z - z_0)(z + z_0)| = |z - z_0| |z + z_0| =$$
$$= |z - z_0| |(z - z_0) + 2z_0|$$

$$\stackrel{\Delta_{\text{Dreieck}}}{\leq} |z - z_0| (|z - z_0| + 2|z_0|)$$

$$\text{Sei } \delta = \max\left\{1, \frac{\varepsilon}{1+2|z_0|}\right\}$$

Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < \delta$ gilt

$$|z - z_0| < \frac{\varepsilon}{1+2|z_0|} \quad \text{und} \quad |z - z_0| + 2|z_0| < 1 + 2|z_0|$$

$$\text{und daraus } |f(z) - f(z_0)| \leq |z - z_0| (|z - z_0| + 2|z_0|)$$

$$< \frac{\varepsilon}{1+2|z_0|} (1+2|z_0|) = \varepsilon \quad \square$$

Def: Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ ist stetig, falls f in jedem Punkt $z_0 \in D$ stetig ist.

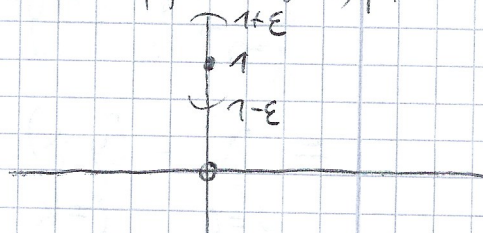
~~Def:~~ Sei $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ und $x_0 \in D$

f ist nicht stetig in $x_0 \iff \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in D:$

$$|x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Beispiel: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}; x \mapsto \begin{cases} 1 & (x=0) \\ 0 & (x \neq 0) \end{cases}$

ist nicht stetig in $x=0$



Beweis (des Beispiels)

$\varepsilon = \frac{1}{2}$. Für jedes $\delta > 0$ gibt es ein $x \in \mathbb{R}$,
so dass $|x-0| = |x| < \delta$ und $|f(x) - f(0)|$
 $= |0-1| > \frac{1}{2} = \varepsilon$

(Zum Beispiel $x = \frac{\delta}{2}$)

Beispiel: Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$;
 $x \mapsto \sqrt[k]{x}$ stetig.

Wir benötigen das folgende Lemma

Lemma: Seien $x, y \in \mathbb{R}$ so dass $0 \leq x \leq y$. Es gilt

$$0 \leq \sqrt[k]{y} - \sqrt[k]{x} \leq \sqrt[k]{y-x}$$

Beweis: Wenn $y \geq x$, dann $\sqrt[k]{y} \geq \sqrt[k]{x}$

Es folgt: $\sqrt[k]{y} - \sqrt[k]{x} \geq 0$

Zweit Ungleichung mit Widerspruchsbeweis

Nehme an, dass $\sqrt[k]{y} - \sqrt[k]{x} > \sqrt[k]{y-x}$

Dann gilt: $y = (\sqrt[k]{y-x} + \sqrt[k]{x})^k > (\sqrt[k]{y-x} + \sqrt[k]{x})^k =$ Binomial定理

$$= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (\sqrt[k]{y-x})^j (\sqrt[k]{x})^{k-j}$$

$$= x + (y-x) + \underbrace{\sum_{j=1}^{k-1} \binom{k}{j} (\sqrt[k]{y-x})^j (\sqrt[k]{x})^{k-j}}_{\geq 0}$$

$$= x + y - x = y \Rightarrow y > y \quad \Downarrow$$

Es folgt, dass $\sqrt[k]{y} - \sqrt[k]{x} \leq \sqrt[k]{y-x}$ $\square$

Beweis für Stetigkeit von $f: x \mapsto \sqrt[k]{x}$

Sei $x_0 \in [0, \infty)$ beliebig. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

Für $x \in [0, \infty)$ gilt $|f(x) - f(x_0)| = |\sqrt[k]{x} - \sqrt[k]{x_0}|$

$\stackrel{\text{Lemma}}{\leq} \sqrt[k]{|x - x_0|}$. Sei $\delta = \varepsilon^k$. Für alle $x \in [0, \infty)$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt $|f(x) - f(x_0)| = \sqrt[k]{|x - x_0|} < \sqrt[k]{\delta} = \sqrt[k]{\varepsilon^k} = \varepsilon$. $\square$

Def: Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ und sei $f: D \rightarrow \mathbb{C}$.

f ist folgenstetig in einem Punkt $x_0 \in D$, wenn

$f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x_0)$ für alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D mit

$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$. f ist folgenstetig wenn f in jedem

Punkt $\in D$ folgenstetig ist.

Beispiel: $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}; z \mapsto z^3 + 1$ ist folgenstetig.

Beweis: Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ beliebig. Sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige konvergente

Folge in $\mathbb{C}$ mit $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_0$.

Es gilt $f(z_n) = z_n^3 + 1$. Da $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_0$, folgt aus Produkt- und Additionsregel: $z_n^3 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_0^3$ und $z_n^3 + 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_0^3 + 1$

Daher $f(z_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(z_0)$ $\square$

Satz: Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ und sei $x_0 \in D$ und sei
 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$.

f ist genau dann stetig in x_0 , wenn f
folgenreteig in x_0 ist.

Beweis: Nehme an, dass f stetig ist in x_0 . Sei
 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in D , sodass $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$.
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da f stetig ist in x_0 ,
gibt es ein $\delta > 0$, sodass

$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$.

Da $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass
 $|x_n - x_0| < \delta$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$.

Für alle $n \geq N$ gilt dann $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Es folgt, dass $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x_0)$
und damit, dass f folgenreteig in x_0 ist.

(Zurück Implikation)

Nehme an, dass f nicht stetig ist in x_0 . Zu zeigen:

" f ist nicht folgenreteig in x_0 ."

Es gibt ein $\varepsilon > 0$, sodass für alle $\delta > 0$ es ein
 $x \in D$ gibt mit $|x - x_0| < \delta$ und $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$.

$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in D: |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$.

Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen x_0 , aber $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$
konvergiert nicht gegen $f(x_0)$.

Es folgt, dass f nicht folgenreteig in x_0 ist. $\square$

Satz: Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ und sei $x_0 \in D$ und seien
 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ und $g: D \rightarrow \mathbb{C}$.

Wenn f und g beide (folgen-)stetig in x_0 sind, dann
sind $f+g: D \rightarrow \mathbb{C}; x \mapsto f(x)+g(x)$

und $f \cdot g: D \rightarrow \mathbb{C}; x \mapsto f(x) \cdot g(x)$
(folgen-)stetig in x_0 .

Wenn $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, dann ist auch

$f/g: D \rightarrow \mathbb{C}; x \mapsto f(x)/g(x)$ (folgen-)stetig in x_0 .

Beweis: Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige konvergente Folge in D
mit $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$.

Es gilt $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x_0)$ und $g(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g(x_0)$

Die Rechenregeln für Grenzwerte implizieren

$$\begin{aligned}(f+g)(x_n) &= f(x_n) + g(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x_0) + g(x_0) \\ &= (f+g)(x_0)\end{aligned}$$

Analog für $f \cdot g$ und f/g .

Weil $g(x_n) \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ und
 $g(x_0) \neq 0$

Beispiel: $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}; z \mapsto z$ ist stetig

$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}; z \mapsto c$ mit $c \in \mathbb{C}$
ist stetig.

Alle Polynomfunktionen sind stetig

Alle rationalen Funktionen

$\frac{f}{g}: \mathbb{C} \setminus g^{-1}(\{0\}) \rightarrow \mathbb{C}$ mit Polynomf. f und g
sind stetig.