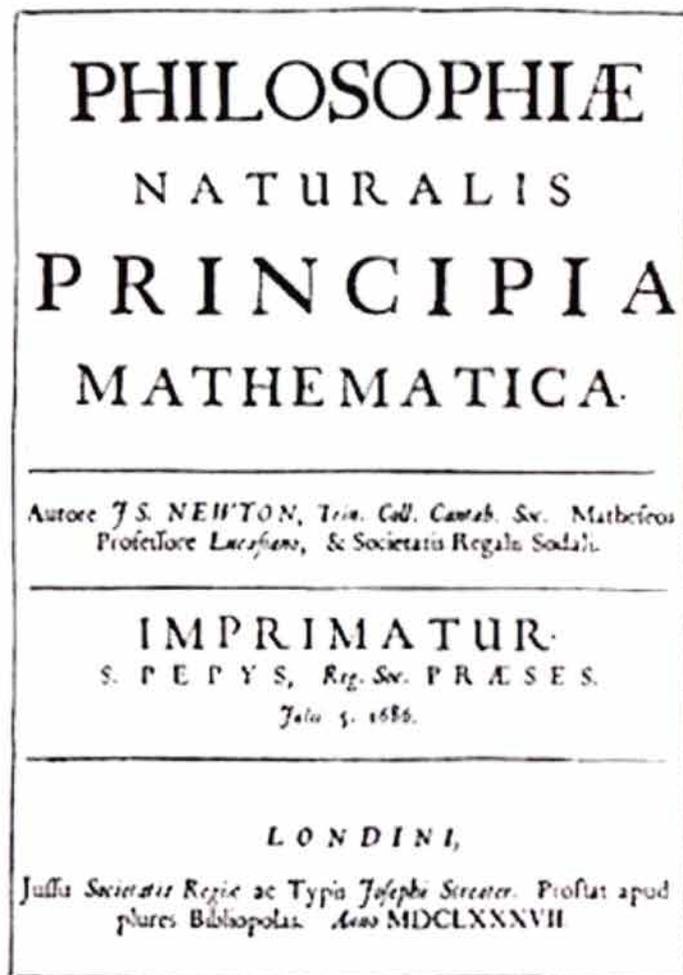
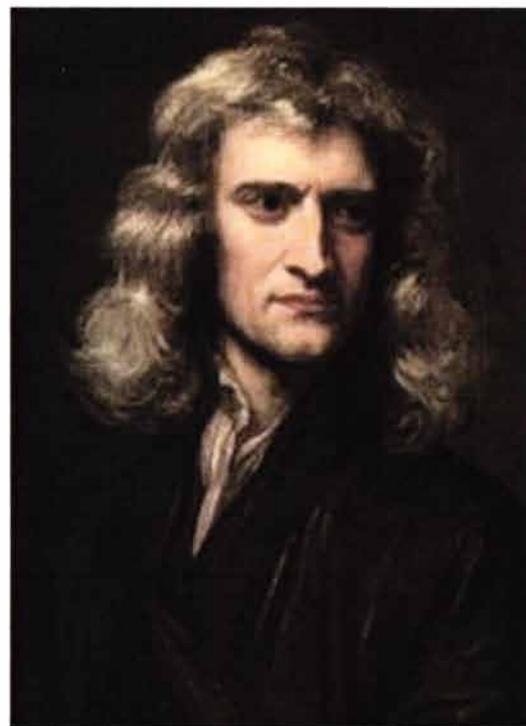


Brief history



(1687)



Sir Isaac Newton
(1689, by Godfrey Kneller)

* January 4th 1643, in Woolsthorpe; † March 31st 1727 in London

2.1. Newton'sche Axiome:

→ Grundlage der klassischen Mechanik (axiomatische Formulierung)

→ Isaac Newton (1687):

I. Es gibt Bezugssysteme (sog. Inertialsysteme, IS), in

denen für einen kräftefreien Massenpunkt gilt:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(\vec{E})}{dt} = \text{const.}$$

II. Für die Beschreibung der Dynamik eines Massenpunkts (MP)

auf dem die Kraft \vec{F} wirkt lautet die DGL:

$$(*) \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \text{mit} \quad \vec{p} = m \cdot \vec{v} \hat{=} \text{Impuls}$$

$$\text{also: } \vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d(m\dot{\vec{r}}(t))}{dt}$$

$$(**) \quad \vec{F} = \frac{dm(t)}{dt} \cdot \vec{r}(t) + m(t) \ddot{\vec{r}}(t)$$

Bemerkung: Falls $m(t) = \text{const.}$ (d.h. zeitlich konstant), so

vereinfacht sich die DGL zu:

$$\vec{F} = m \ddot{\vec{r}}(t)$$

III. Jede Kraft erzeugt eine Gegenkraft, die mit gleicher Stärke in entgegengesetzter Richtung wirkt!

$$\vec{F}_{\text{actio}} = -\vec{F}_{\text{reactio}} \quad \text{oder kurz} \quad \underline{\text{„actio = reactio“}}$$

Bemerkung: i) zu III.: Achtung!

Das 3. Axiom gilt nicht in allen Bereichen der Physik!

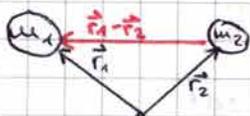
Ein Gegenbeispiel: die Lorentzkraft in der Elektrodynamik

ii) zu II.: Das 2. Newton'sche Axiom definiert die

Grundaufgabe der klassischen Mechanik:

→ Berechnung der Bahnkurve $\vec{r}(t)$ eines Körpers der Masse m für ein gegebenes Kraftfeld \vec{F}

Beispiel: a) Gravitationskraft:



$$\vec{F}_{12} = -G m_1 m_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \rightarrow \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} = \frac{\vec{e}_{12}}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}$$

mit $G = 6,674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$

b) Reibungskräfte:

→ geschwindigkeitsabhängig; d.h. vor allem:

$$\vec{F}_{R1} = -\alpha \cdot \vec{v} \quad \text{oder} \quad \vec{F}_{R2} = -\beta |\dot{\vec{r}}|^2 \cdot \vec{e}_{\dot{\vec{r}}}$$

„lineare“ Reibung

$$= -\beta |\dot{\vec{r}}| \cdot |\dot{\vec{r}}| \cdot \vec{e}_{\dot{\vec{r}}}$$

$$= \dot{\vec{r}}$$

$$= -\beta |\dot{\vec{r}}| \dot{\vec{r}}$$

quadratische Reibung

c) Ausblick auf die ED:

$$\text{Die Lorentz-Kraft: } \vec{F}_{\text{Lorentz}} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Abschlussbemerkung: Bei (*) bzw. (**) handelt es sich um

Differentialgleichungen 2. Ordnung

für die Bahnkurve $\vec{r}(t)$!

Folge: Die allgemeine Lösung hat 2 Integrationskonstanten

z.B. $\vec{r}(0)$ und $\dot{\vec{r}}(0)$.

d.h. Wir benötigen zwei Anfangsbedingungen,

um eine eindeutige Lösung der DGL zu

bekommen.

Zur Lösung der DGL gibt es mehrere Methoden, die je nach

Fragestellung anzuwenden sind:

- Einsetzen von Ansätzen (mindestens 2 freie Parameter)
- Trennung der Variablen
- direktes Aufintegrieren

Beispiel: i) Freier Fall (1-dimensional):

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \ddot{\vec{r}} \quad ; \quad 1 \text{ dim.}$$

$$F = m \cdot \ddot{z}$$

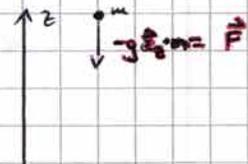
$$\boxed{-mg = m \ddot{z}}$$

$$\text{als Lösung: } z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + c_1 t + c_2$$

oder etwas formaler (alternativer Lösungsweg):

$$-mg = m \dot{v} \quad / \text{ mit } \dot{v} = \ddot{z}$$

$$-mg = m \frac{dv}{dt} \quad / \text{ formal: } \cdot dt$$



Trennung der Variablen: $-v \cdot g \, dt = v \, dv$ / $\int \dots$

$$-g \int dt = \int dv$$

$$-g(t - t_0) = v - v_0 \quad | \quad g t_0 + v_0 = C_1$$

$$-gt + C_1 = v = \frac{dz}{dt} \quad | \text{formul.: } \cdot dt$$

Trennung der Variablen: $(-gt + C_1) \cdot dt = dz$ / $\int \dots$

$$\int (-gt + C_1) dt = \int dz$$

$$-\frac{1}{2}gt^2 + C_1 t - C_0 = z + C_2 \quad | \quad C_2 - C_0 = C_2$$

$$\leadsto \underline{z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2} \quad \checkmark$$

Schließlich: Einsetzen der Anfangsbedingungen; hier: $\underline{z(0)}$ und $\underline{\dot{z}(0)}$
 $= C_2$

$$\leadsto \dot{z}(t) = -gt + C_1 \Rightarrow \dot{z}(0) = C_1$$

$$\underline{\text{insgesamt: } z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \dot{z}(0) \cdot t + z(0)}$$

ii) Linearer harmonischer Oszillator

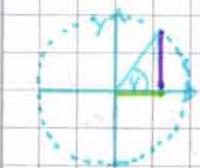
$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x = 0$$

d.h. $|\vec{F}| \sim x$; d.h. die Rückstellkraft ist

proportional zur Auslenkung!

Lösungsidee: komplexer Exponentialansatz

Rechte:
 $e^{i\lambda t}$ = cosinus



$$x(t) = e^{i\lambda t} \quad ; \quad \lambda \text{ konstant } \in \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = i\lambda \cdot e^{i\lambda t}$$

$$\Rightarrow \ddot{x}(t) = (i\lambda)^2 \cdot e^{i\lambda t} = -\lambda^2 \cdot e^{i\lambda t}$$

$$-\lambda^2 e^{i\lambda t} + \omega_0^2 e^{i\lambda t} = 0$$

$$(-\lambda^2 + \omega_0^2) e^{i\lambda t} = 0 \quad \text{für beliebiges } t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow -\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$$

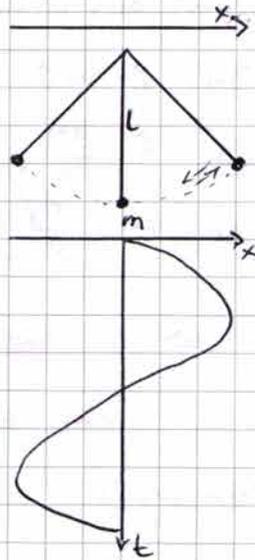
$$\Rightarrow \boxed{\lambda = \pm \omega_0}$$

als allgemeine (mathematische) Lösung:

$$\boxed{x(t) = C_1 e^{-i\omega_0 t} + C_2 e^{+i\omega_0 t}}$$

Achtung: Experimentell beobachtbar sind Amplituden, also die Auslenkung, d.h. $x(t) \rightarrow \text{Re}\{x(t)\}$

\leadsto Berechnung des Realteils



30.10.17

$$\leadsto x(t) = A \cos(\omega_0 t + \alpha)$$

mit an die Randbedingungen anzupassenden Parametern

A (Amplitude) und α (Phase)

Problem: Die Lösung der Newtonschen Bewegungsgleichung (DGL)

kann beliebig kompliziert werden!

Ausweg: • numerische Lösung!

• Ausnutzung von Symmetrien, Erhaltungssätze!

2.2 Physikalische Messgrößen und Erhaltungssätze

Erhaltungsgrößen $\hat{=}$ physikalische Größen, die sich zeitlich nicht ändern

2.2.1. Impuls

beinhaltet aus dem 2. Newtonschen Axiom

Def. $\vec{p} = m \vec{v}$

und $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$; d.h. wirkt auf einen MP keine Kraft ($\vec{F}=0$),

so gilt: $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$

\Rightarrow im kraftbefreien Fall ist der Impuls $\vec{p} = m\vec{v}$

eine Erhaltungsgröße!

2.2.2. Drehimpuls

Selbst wenn Kräfte wirken, können einige physikalische Größen

konstant bleiben, z.B. der Drehimpuls

$$\vec{L} := \vec{r} \times \vec{p}$$

Frage: Wie ändert sich \vec{L} mit der Zeit?

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} \stackrel{\text{Produktregel}}{=} \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

mit $\vec{p} = m\vec{v} = m\dot{\vec{r}}$

$$= m(\dot{\vec{r}} \times \vec{r}) + \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

\vec{M} heißt Drehmoment

Klausur: Newton'sche
Axiome, evtl.
erklären/formulieren
 \Rightarrow Verständnis

Ableitung: Falls das Drehmoment $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ verschwindet

(für alle Zeiten t) so bleibt der Drehimpuls

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \text{ zeitlich konstant!}$$

\leadsto Drehimpulserhaltung!

Beispiel: Insbesondere gilt $\vec{r} \times \vec{F} = 0$ falls $\vec{r} \parallel \vec{F}$.

Das ist aber gerade ~~der~~ bei Zentralfeldern der Fall,

also z.B. dem Gravitationsfeld!

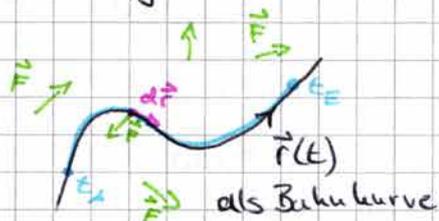
2.2.3. Arbeit und Leistung

Arbeit = Kraft mal Weg!

Eine Kraft verrichtet Arbeit entlang eines Weginkrements:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

↑
verrichtete Arbeit



Für die Arbeit entlang einer

Bahnkurve c erhalten wir dann

$$W = \int_c dW = \int_c \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

verrichtete Gesamtarbeit!

$$\int \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int \vec{F} \cdot \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{v}} dt$$

$$\Rightarrow W = \int_{t_A}^{t_E} \vec{F} \cdot \vec{v} dt$$

alternative
Formulierung

Diesem Ausdruck entnehmen wir:

$$\frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} =: P \text{ heißt Leistung!}$$

Bemerkung: Einheiten

$$[W] = \text{„Joule“} = J = Nm = \frac{kgm^2}{s^2}$$

$$[P] = J/s = W = \text{„Watt“}$$

Beispiel: Der magnetische Anteil der Lorentzkraft leistet keine Arbeit,

$$\text{denn } \vec{F}_{\text{magn}} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{\text{magn}} \cdot \vec{v} = q \underbrace{(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v}}_{=0} = 0$$

Ausbleiben auf die
Elektrodynamik

2.2.4. Kinetische Energie

aus 2.2.3.: „Kräfte leisten Arbeit“

Frage: Welche Größe ändert sich dadurch?

dazu definieren wir: $T = \frac{1}{2} m v^2$ heißt kinetische Energie!

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \frac{d(\frac{1}{2} m v^2)}{dt} \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{falls } \frac{dm}{dt} = 0}}{=} \frac{m}{2} \frac{d(\vec{v} \cdot \vec{v})}{dt} \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Produktregel}}}{=} \frac{m}{2} \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \right) \\ &= \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{v} = \vec{F} \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

Deutung: Die geleistete Arbeit wird in kinetische Energie umgesetzt.

2.2.5. Potentiale

Die Berechnung der Arbeitsintegrale kann manchmal kompliziert werden. Im Falle konservativer Kraftfelder oft einfacher

→ Potentiale

Definition: i) Eine Kraft heißt konservativ, wenn es eine Funktion $U(\vec{r})$ gibt, so dass die Kraft als Gradient dieser Funktion geschrieben werden kann:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U$$

ii) Die Funktion $U(\vec{r})$ wird Potential genannt.

Achtung:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{F} \text{ ist konservativ}$$

Beweis: mit $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$ folgt $\vec{\nabla} \times (-\vec{\nabla} U) = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} U = 0$ q.e.d.

Folge: Für konservative Kraftfelder ist das Arbeitsintegral unabhängig vom Weg!

denn:

$$\begin{aligned} W &= \int_{\vec{A}}^{\vec{E}} \vec{F} d\vec{r} = - \int_{\vec{A}}^{\vec{E}} \underbrace{\vec{\nabla} U}_{\left(\begin{array}{c} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{array} \right)} \cdot d\vec{r} = - \int dU = -(U(\vec{E}) - U(\vec{A})) \\ &= \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \\ &= dU(x, y, z) \end{aligned}$$

\vec{A} : Anfang
 \vec{E} : Ende

vollständiges
Differential

Bemerkung: Insbesondere folgt daraus für konservative Kraftfelder

bei geschlossenen Wegen
$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

II Erhaltung der Gesamtenergie:

$$W + T = \text{const.}$$

Beweis des Energiesatzes:

08.11.17

„In konservativen Kraftfeldern gilt die Energieerhaltung“

dazu:
$$\frac{dU(x, y, z)}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} \quad (*)$$

(Kettenregel (der Analysis mehrerer Veränderlicher))

vgl. mit Fehlerrechnung

$$\Delta U(x, y, z) = \left| \frac{\partial U}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \Delta y + \left| \frac{\partial U}{\partial z} \right| \Delta z$$

aus (*)
$$\frac{dU}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \vec{\nabla} U \cdot \vec{v} = \vec{\nabla} U \cdot \vec{v}$$

mit $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$ (konservatives Kraftfeld)

$$\Rightarrow \frac{dU}{dt} = -\vec{F} \cdot \vec{v} = -P \quad (\text{Leistung})$$

mit $P = \frac{dW}{dt}$ bzw. $P = \frac{dT}{dt}$ $T = W = \text{kinetische Energie}$

$$\Rightarrow \frac{dU}{dt} = -\frac{dT}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d(U+T)}{dt} = 0$$

$$E := U + T = \text{const.} \quad (E \hat{=} \text{Gesamtenergie})$$

d.h. die Summe aus potentieller Energie U und kinetischer

Energie T ist zeitlich konstant

2.3. Bewegte Bezugssysteme

06.11.17

Zentrale Größe $\vec{r}(t)$ als Bahnkurve

↳ bzgl. eines Bezugssystems gegeben durch:

- Ursprung $\vec{0}$
- drei linear unabhängige Richtungsvektoren $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

Achtung: unendlich viele dieser Bezugssysteme

- Schwerpunktsystem: $\vec{0}$ = Schwerpunkt des Systems
- Laborsystem

Beispiele: Fallversuche im

i) Flugzeug

ii) sich drehenden Bezugssystemen

allgemein besteht folgender Zusammenhang:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{d}(t) \quad (*) \quad \vec{d}(t) \hat{=} \text{Differenzvektor}$$

Für die Newton'sche Bewegungsgleichung:

$$\vec{F}' = m \frac{d^2 \vec{r}'}{dt'^2} = m \underbrace{\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}}_{\vec{F}} + m \underbrace{\frac{d^2 \vec{d}(t)}{dt^2}}_{\vec{F}_S} = \vec{F} + \vec{F}_S$$

d.h. durch Wechsel des Bezugssystems ändern sich die Kräfte;
die Anteile, die sich ändern heißen Scheinkräfte, weil man
sie durch geeignete Bezugssysteme „wegtransformieren“ kann.

2.3.1. Galilei Transformation

laut 1. Newton'schem Axiom: „Ohne Ursache (Kraft), keine Beschleunigung“

Bezugssysteme, in denen dies gilt heißen **Inertialsysteme**

Achtung: Es gibt weniger Inertialsysteme, als Bezugssysteme

(Nicht jedes Bezugssystem ist ein Inertialsystem)

aber dennoch: es gibt kein ausgezeichnetes Inertialsystem

Den Übergang $IS_1 \rightarrow IS_2$ realisiert man durch **Galilei-Transformation**

$$\vec{r}' = \underline{\underline{D}} \vec{r} - \vec{v} t - \vec{a} \quad \text{und} \quad t' = t - t_0 \quad \leadsto \text{insgesamt 10 Parameter}$$

• $t_0 \rightarrow$ zeitliche Verschiebung (1)

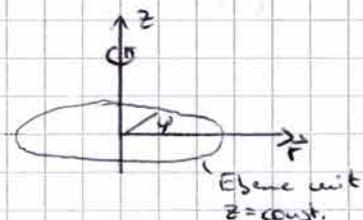
• $\vec{a} \rightarrow$ räumliche Verschiebung (3)

• $\vec{v} \rightarrow$ Relativbewegung (3)

• $\underline{\underline{D}} \rightarrow$ Drehung im Raum (3)

Beispiel:

$$i) D_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



ii) Drehung der x-Achse um 30° bzgl. der z-Achse

$$D_z(60^\circ) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.3.2. Zur Galilei-Invarianz der Newton'schen Mechanik

Forderung: Unter Galilei-Transformation sollen die physikalischen Gesetze unverändert („invariant“) bleiben

Beispiel: Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft

$$\dot{\vec{r}}' = \frac{d\vec{r}'}{dt} = \underline{D} \frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{v}$$

$$\ddot{\vec{r}}' = \frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} = \underline{D} \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$m \cdot \ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

Bewegungsgleichung

$$m \cdot \ddot{\vec{r}}'(t') = m \underline{D} \ddot{\vec{r}}(t) = \underline{D} F(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \vec{F}'(\vec{r}', \dot{\vec{r}}', t')$$

Die Bewegungsgleichung $\vec{F} = m \cdot \ddot{\vec{a}}$ bleibt also unter Galilei-Transformation invariant!

=> Galilei-Invarianz

Beispiele: i) Sei $G(t) = \vec{r}(t)$ die Bahnkurve eines Teilchens

$$d\vec{r}_B = d\vec{r}'_B + d\varphi \times \vec{r}' \quad | dt$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}'_B}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} \times \vec{r}'$$

$$\Rightarrow \vec{v}_B = \vec{v}'_B + \vec{\omega} \times \vec{r}' \quad \text{I} \quad \text{mit } \vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} \hat{=} \text{Winkelgeschwindigkeit}$$

ii) Sei nun $G(t) = \vec{v}_B(t) (= \vec{v}'_B + \vec{\omega} \times \vec{r}')$

ausgehend I $\frac{d}{dt}$:

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_B = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{B'} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

↳ Vorsicht: auf der rechten Seite steht die Beschleunigung in B gemessen in B'

Wir benötigen: Beschleunigung in B' gemessen in B'

dazu: Einsetzen von $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_B &= \frac{d}{dt} \underbrace{(\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}')}_{=\vec{v}} \Big|_{B'} + \omega \underbrace{(\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}')}_{=\vec{v}} \\ &= \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{B'} + \underbrace{\frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r}')}{dt}} + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \end{aligned}$$

$$\text{falls } \vec{\omega} = \text{const.} \quad \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

$$\leadsto \vec{F}' = m \frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} = F - \underbrace{2m(\vec{\omega} \times \vec{v}')}_{\text{Coriolis-Kraft}} - \underbrace{m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')}_{\text{Zentrifugalkraft}}$$

=> Scheinkräfte, die durch die Bewegung der Erde auftreten

Anwendungsbeispiele: i) Drehrichtung (Ausrichtung)

von Wirbelströmen

ii) Foucault'sches Pendel

Bemerkung: i) Die Galilei-Invarianz gilt in der gesamten klassischen Mechanik, aber nur dort

ii) Insbesondere nicht bei Licht; „Licht bewegt sich mit der konstanten Lichtgeschwindigkeit c

unabhängig von der Bewegung des Beobachters!

d.h. keine Addition der Geschwindigkeiten, wie sie bei der Galilei-Transformation entstehen würde.

sog. Lorentz-Transformation der speziellen Relativitätstheorie

$$c' = c = \text{const.}$$

$$x' = \gamma(x - vt) \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v^2}{c^2}\right)}}$$

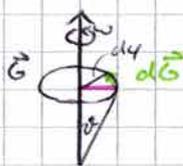
$$t' = \gamma\left(t - \frac{xv}{c^2}\right)$$

2.3.3. Rotierende Bezugssysteme

z.B. die Erde als Laborsystem: Rotation bedeutet Änderung der

Richtung der Geschwindigkeit, d.h. $a = \frac{d\vec{v}}{dt} \neq 0$

\Rightarrow beschleunigte Bewegung



$$d\vec{G} = d\vec{\varphi} \times \vec{G}$$

$$|d\vec{G}| = |d\vec{\varphi}| \cdot |\vec{G}| \cdot \sin \varphi$$

Falls sich $G(t)$ im Bezugssystem B bewegt, so ergibt sich:

$$d\vec{G}_B = d\vec{G}_B + d\vec{\varphi} \times \vec{G}$$

$$\vec{F}' = m \frac{d^2 \vec{r}'}{dt^2} = \vec{F} - \underbrace{2m(\vec{\omega} \times \vec{v}')}_{\text{Coriolis Kraft}} - \underbrace{m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')}_{\text{Zentrifugalkraft}}$$

10.11.17

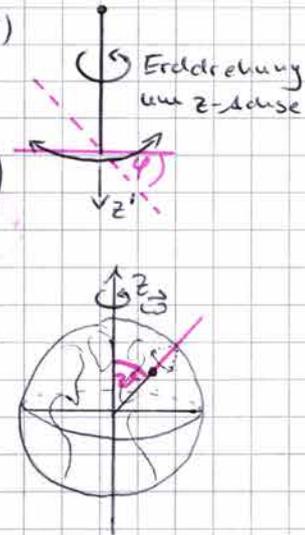
1. Beispiel: Wirbelstürme (s. Artikel im Physik Journal)

2. Beispiel: Das Foucault'sche Pendel

$$\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin 2\varphi \\ 0 \\ \cos 2\varphi \end{pmatrix} \cdot \omega \quad (\text{Setze } 2\varphi = 0^\circ)$$

Damit ergibt sich für die Coriolis-Kraft:

$$\begin{aligned} -2m \vec{\omega} \times \vec{v}' &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2m\omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_x' \\ v_y' \\ v_z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin 2\varphi \\ 0 \\ \cos 2\varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_x' \\ v_y' \\ v_z' \end{pmatrix} \\ &= -2m\omega \begin{pmatrix} -\cos 2\varphi v_y' \\ \cos 2\varphi v_x' + \sin 2\varphi v_z' \\ -\sin 2\varphi v_x' \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Für kleine Auslenkungen dürfen wir setzen:

$$z' = 0 \quad \text{und} \quad v_z' = 0$$

Damit ergibt sich ein System gekoppelter DGL

$$\begin{cases} \ddot{x}' + \frac{g}{L} x' - 2\omega \sin \varphi \dot{y}' = 0 \\ \ddot{y}' + \frac{g}{L} y' + 2\omega \sin \varphi \dot{x}' = 0 \end{cases} \quad \text{Lösung: s. Übungsblatt 5}$$

$$\leadsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = c \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}} \cdot t\right) \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega \sin \varphi t) \\ \sin(\omega \sin \varphi t) \end{pmatrix}$$

$$\text{Die Dauer einer Schwingung ist also } T = \frac{2\pi}{\sqrt{g/L}} = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$\text{Bei einer Länge von 63m: } T = 16\text{s}$$

In Würzburg dreht sich dabei die Ebene in 15,6 Stunden um 180° (d.h. 7,8 Stunden um 90°)

3. Lagrange-Formalismus (Lagrange-Mechanik)

Motivation: Im Prinzip können wir nun alle Probleme der Mechanik

formulieren und über DGL lösen. Das ist aber oftmals analytisch kompliziert oder nicht möglich.

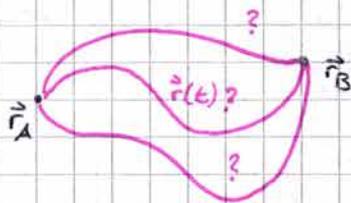
Der Lagrange-Formalismus bietet einen eleganten Zugang zu den Bewegungsgleichungen und den physikalischen Eigenschaften der betrachteten Systeme.

Mathematisch bedeutet dies: Variationsrechnung

Die Variationsrechnung stellt dabei eine Verallgemeinerung der bekannten Optimierungsprobleme (Schule) dar.

Denn: In der Mechanik diejenigen Bahnkurven $\vec{r}(t)$ ($\hat{=}$ Funktionen) die die Bewegung eines Massepunktes „optimieren“.

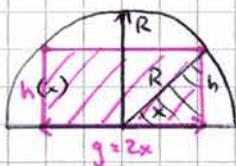
Frage: Gegeben seien Anfangs- und Endpunkt einer Bewegung, wie verläuft die Bahnkurve $\vec{r}(t)$?



Bevor wir uns ein Beispiel anschauen:

„einfaches“ Optimierungsproblem:

Ein Rechteck werde in einem Halbkreis (Radius R) eingeschrieben



Wann (d.h. für welche Länge g) wird der Flächeninhalt des Rechtecks maximal.

1. Schritt: Aufstellen einer Gleichung $A(x)$, $x = \frac{g}{2}$

Offensichtlich gilt: $A(x) = g \cdot h(x) = 2x \cdot h(x)$

$$\text{sowie } R^2 = x^2 + h(x)^2$$

$$\Rightarrow h(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$\text{insgesamt } A(x) = 2x \sqrt{R^2 - x^2}$$

Bedingung für Extremwert: $A'(x) = \frac{dA(x)}{dx} = 0$

$$A'(x) = (2x)' \cdot \sqrt{R^2 - x^2} + 2x \cdot \sqrt{R^2 - x^2}'$$

$$= 2 \cdot \sqrt{R^2 - x^2} + 2x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$= \frac{2(R^2 - x^2) - 2x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{2R^2 - 4x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$\text{also aus } A'(x) = 0 \Rightarrow 2R^2 - 4x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x_m = \frac{\sqrt{2}}{2} R$$

$$\text{damit } A(x_m) = 2x_m \cdot \sqrt{R^2 - x_m^2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} R \cdot \sqrt{R^2 - \frac{1}{2} R^2} = R^2$$

$\sqrt{\frac{1}{2} R^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} R$

2.1. Variationsrechnung

13.11.17

Wir betrachten „Funktioenen von Funktionen“: $F[y]$ ($y=y(x)$ Funktion von x)

$\rightarrow F[y]$ wird als Funktional bezeichnet!

Die Disziplin in der Mathematik, die sich mit Funktionalen beschäftigt,

ist die Funktionalanalysis.

Bevor wir allgemeinere Fragestellungen widmen:

ein konkretes Beispiel:

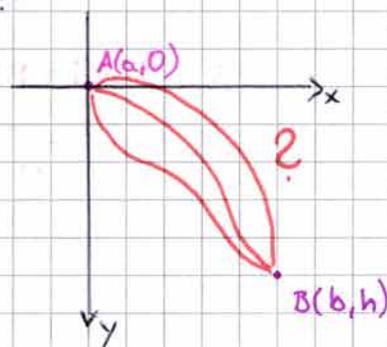
Frage: Wie muss sich der Massepunkt

bewegen (reibungsfrei auf einem

gedachten Draht) damit die Zeit

zwischen Anfangspunkt $A(a, 0)$ und

Endpunkt $B(b, h)$ minimal wird?



Es gilt für die Laufzeit T von A nach B :

$$T = \int_a^b dt, \text{ mit } dt = \frac{ds}{v}$$

$$= \int_a^b \frac{ds}{v}, \text{ mit } ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dx \sqrt{1 + y'(x)^2}$$

und $v = v(x)$? hier liefert die Energieerhaltung:

$$E_{kin} = E_{pot}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh = mgy(x)$$

$$\text{also: } v(x) = \sqrt{2gy(x)}$$

und insgesamt: $T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^b \frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{y(x)} dx = F[y]$ als Funktional!

Frage: Wann wird $T = F[y]$ minimal?

$$\text{dazu: Funktionalableitung } \frac{\delta F[y]}{\delta y} = 0$$

δ nicht
oder d

Als Ergebnis erhalten wir nach Lagranger Rechnung:

$$x = r(1 - \cos\varphi)$$

$$y = r(1 - \cos\varphi)$$

also eine Zykloide (s. Übung)

Nun etwas allgemeiner: Wir betrachten Funktionen der Form

Funktional
der klassischen
Mechanik

$$F[y] = \int_a^b f(y(x), y'(x), x) dx \quad (*)$$

Was bedeutet hier $\frac{\delta F[y]}{\delta y} = 0$?

Differenzquotient

$$\text{dazu: } \frac{\delta F[y]}{\delta y} = \frac{F[y(x) + \delta y(x)] - F[y(x)]}{\delta y}$$

als Definition der Funktionalableitung

$$\leadsto \delta F[y] = F[y(x) + \delta y(x)] - F[y(x)]$$

$y \hat{=} y(x)$

nach Einsetzen von (*): $= \int_a^b (f(y + \delta y, y' + \delta y', x) - f(y, y', x)) dx$

nach Taylorentwicklung

$$= f(y, y', x) + \frac{\delta f}{\delta y} \delta y + \frac{\delta f}{\delta y'} \delta y' + \dots \text{höhere Terme}$$

$$= \int_a^b \left(\frac{\delta f}{\delta y} \delta y + \frac{\delta f}{\delta y'} \delta y' \right) dx$$

$$\delta y' = \delta \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} (\delta y)$$

nach partieller Integration des zweiten Terms:

$$\text{I} \quad \delta F[y] = \int_a^b \left(\frac{\delta f}{\delta y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\delta f}{\delta y'} \right) \right) \delta y(x) dx \quad \text{I. } \frac{1}{\delta y(x)}$$

$$\text{II} \quad \Rightarrow \frac{\delta F[y]}{\delta y} = \int_a^b \left(\frac{\delta f}{\delta y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\delta f}{\delta y'} \right) \right) dx$$

Die Bedingung $\frac{\delta F[y]}{\delta y} = 0$ führt also auf die DGL:

$$\frac{\delta f}{\delta y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\delta f}{\delta y'} \right) = 0 \quad \text{„Euler-Lagrange Gleichungen“}$$

Bemerkung: Ist $F = F[y_i]$ mit $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ ein Funktional

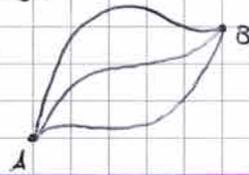
mehrerer Funktionen $y_i(x)$, so ergibt sich ganz einfach:

$$\frac{\delta f}{\delta y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\delta f}{\delta y_i'} \right) = 0 \quad \text{mit } i \in \{1, 2, \dots, N\}$$

2.2. Das Hamilton'sche Prinzip (der kleinsten Wirkung)

Frage: Wie verläuft die „wahre“ Bahnkurve?

(als zentrale Aufgabe der Mechanik)



„In der Mechanik verläuft die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ eines KP genau so, dass die **Wirkung** minimiert wird!“

Merke: „Wirkung = Energie \times Zeit“

genauer:
$$S = S[\vec{r}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)}_{\text{[Energie]}} dt$$

Die Wahl $L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = T - U$ als Differenz von kinetischer und potentieller Energie macht das Hamilton'sche Prinzip äquivalent zu den Newton'schen Bewegungsgleichungen!

(Beweis in den Übungen)

also muss gelten:
$$\frac{\delta S[\vec{r}(t)]}{\delta \vec{r}} = 0$$

Die Funktionalanalysis liefert uns dann als Ergebnis (s. 2.1):

n Gleichungen
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial r_i} = 0 \quad \text{mit } i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$$
 Euler-Lagrange Gleichungen (2. Art)

Reihenfolge
variabel!
einfach / = (-1)

bzw. eindimensional: L heißt Lagrange Funktion

die r_i heißen generalisierte Koordinaten

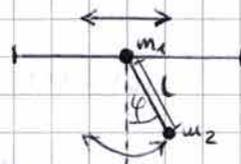
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

Achtung: Die physikalischen Aussagen sind unabhängig von der Zahl der Koordinaten; es ändert sich die Mathematik.

Beispiel: Ein Pendel mit beweglicher Aufhängung

gesucht sind die Bewegungsgleichungen

für w_1 und w_2 :



Lösung: über die Euler-Lagrange Gleichungen bezüglich sogenannter

verallgemeinerter Koordinaten q_1, q_2

1. Schritt: für w_1 : $x_1 = x(t)$ und $y_1 = 0$

für w_2 : $x_2 = x_1 + L \cdot \sin \varphi = x(t) + L \cdot \sin \varphi(t)$

$$y_2 = L \cdot \cos \varphi(t)$$

2. Schritt: Aufstellung der Lagrange Funktion $L := T - U$

mit $T = \frac{m_1}{2} v_1^2 + \frac{m_2}{2} v_2^2$

$$= \frac{m_1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

$$\begin{aligned} \text{und } U &= U_1 + U_2 \\ &= 0 + m_2 g y_2 \\ &= m_2 g y_2 \end{aligned}$$

$$\text{Insgesamt: } L = \frac{m_1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) - m_2 g y_2$$

nach Einsetzen von \dot{x}_1, \dot{y}_1 und \dot{x}_2, \dot{y}_2 :

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_2}{2} (L^2 \dot{\varphi}^2 + 2L\dot{x}\dot{\varphi} \cos\varphi) + m_2 g L \cos\varphi$$

Die Bewegungsgleichungen ergeben sich dann durch Einsetzen von L in die Euler-Lagrange-Gleichung 2. Art!

17.11.17

Bemerkung: i) Die physikalischen Aussagen sind unabhängig von der Wahl der generalisierten Koordinaten, es ändert sich jedoch die Mathematik.

ii) Ein konservatives System ist vollständig durch die Lagrange-Funktion $L = T - U$ gegeben.

iii) Die Lagrange-Funktion besitzt eine Eichinvarianz:

d.h. $L(q, \dot{q}, t)$ ist äquivalent zu

$$\tilde{L}(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} f(q, t)$$

(Beweis in den Übungen)

Diese Eichinvarianz hat zur Folge, dass die Beschreibung Galilei-invariant ist.

iv) Additivität:

Wir betrachten zwei Teilsysteme ohne Wechselwirkung

mit L_1 und L_2 als jeweilige Lagrange-Funktion, so

ergibt sich für das Gesamtsystem: $L_{\text{ges}} = L_1 + L_2$

Beispiele: I) klassisches mit Gravitation:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - m g q = T - U$$

II) klassisches freies Teilchen ($\Rightarrow U = 0$)

$$L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2$$

III) relativistisches freies Teilchen

$$L = -m c^2 \sqrt{1 - \dot{q}^2/c^2}$$

gilt auch für
 q_i, \dot{q}_i

IV) Teilchen mit linearer Reibung:

$$L = e^{\frac{\alpha t}{m}} \left(\frac{m}{2} \dot{\mathbf{q}}^2 - U(\mathbf{q}) \right)$$

föhrt über die Euler-Lagrange-Gleichungen 2. Art auf

$$m\ddot{\mathbf{q}} = -\vec{\nabla} U - \alpha \dot{\mathbf{q}}$$

V) geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld: Vergleichen mit Elektrodynamik

$$L = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - q\varphi(\vec{\mathbf{r}}, t) + q \dot{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}, t)$$

$$\text{mit } \vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}, t) \equiv -\vec{\nabla}\varphi$$

$$\text{mit } \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{d}{dt} \vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}, t)$$

$$\text{und } \vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}, t)$$

als elektrisches und magnetisches Feld

föhrt auf eine Bewegungsgleichung mit Lorentz-Kraft

$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{Lorentz}} = q(\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}, t) + \dot{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}}, t)) = m\ddot{\mathbf{r}}(t)$$

Das Konzept der Lagrange-Funktion ist also universell anwendbar und später auch auf den Fall von Feldern jeglicher Art erweiterbar

→ (Quanten)Feldtheorien

2.3. Systeme mit Zwangsbedingungen (Zwangskräfte):

Oftmals gibt es Einschränkungen der Bewegung durch sogenannte Zwangsbedingungen:

allgemein

$$g_i(\vec{\mathbf{r}}, t) = 0, \quad i=1, \dots, n$$

als n Zwangsbedingungen

Beispiel: Fadenpendel



$$i) z(t) = 0$$

$$ii) x^2(t) + y^2(t) = L^2$$

$$\text{bzw. } x^2(t) + y^2(t) - L^2 = 0$$

Definition:

i) Eine holonome Zwangsbedingung für ein System aus n Teilchen hat

allgemein die Form

$$g_i(\vec{\mathbf{r}}_1, \dots, \vec{\mathbf{r}}_n, t) = 0$$

ii) Ist die Zwangsbedingung nicht explizit zeitabhängig, so heißt sie

skleronom, ansonsten rhonom

mit t oder ohne t

- iii) **Auholonome** Zwangsbedingungen (=nicht holonome) können z.B. Ungleichungen sein. Wir beschreiben uns auf holonome!

2.3.1. Euler-Lagrange-Gleichungen 1. Art

$\delta S[\vec{r}] = 0$ führt auf die Euler-Lagrange-Gleichungen 2. Art

Jetzt: $\delta(S[\vec{r}] - \lambda_i g_i(\vec{r})) = 0$

gilt auch für mehr

erlaubt Variation des Wirkungsfunctionals $S[\vec{r}]$ unter Berücksichtigung als ein \vec{r}

der Zwangsbedingungen $g_i(\vec{r}, t) = 0$

λ_i heißt dabei **Lagrange-Multiplikator!**

Wir erhalten durch Funktionalableitung:

$$\begin{aligned} m\ddot{\vec{r}} &= \vec{F} + \sum_{i=1}^N \lambda_i(t) \vec{\nabla} g_i(\vec{r}, t) \\ &= \vec{F} + \sum_{i=1}^N \vec{F}_{z_i}(t) \end{aligned}$$

mit $\vec{F}_{z_i}(t) = \lambda_i(t) \vec{\nabla} g_i(\vec{r}, t)$ als **Zwangskraft**

Bemerkung: i) Für jede Zwangsbedingung erhalten wir eine Zwangskraft.

ii) Die Zwangskräfte sorgen also dafür, dass die Zwangsbedingungen eingehalten werden und stehen dabei grundsätzlich senkrecht auf der Bewegung ($\vec{F}_{z_i} \perp d\vec{r}$)

D.h. die Zwangskräfte verrichten keine Arbeit!

Frage: Haben die Zwangskräfte dennoch physikalische Relevanz?

Zurück zu unserem Beispiel des Fadenpendels

also: $g_1 = z(t) = 0$

$g_2 = x^2 + y^2 + l^2 = 0$

Wir berechnen zunächst die Gradienten $\vec{\nabla} g_i$:

$\vec{\nabla} g_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{\nabla} g_2 = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix}$

Zu den Zwangskräften fehlen uns noch die Vorfaktoren

λ_1 und λ_2 :

① wegen $z(t) = 0 \forall t$ folgt $\lambda_1 = 0$

② Bestimmung von λ_2 :

Dazu differenzieren wir $g_2(\vec{r}, t) = 0$ zweimal nach der Zeit

Vergesse zur Berechnung der Gradienten, dass $g_i = 0$

$$x^2 + y^2 - l^2 = 0 \quad \left| \frac{d^2}{dt^2} (\dots) = 0 \right. \quad \text{zunächst } \frac{d}{dt}$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 0 \quad \text{/ nochmal}$$

$$2\ddot{x} + 2\dot{x}\dot{y} + 2\dot{y}^2 + 2y\ddot{y} = 0$$

Hier setzen wir die DGL für \ddot{x} und \ddot{y} ein und lösen

anschließend nach l^2 auf.

$$\Rightarrow 2\dot{x}^2 + 2\dot{y}^2 + \lambda_2 \frac{4}{m} x^2 + \lambda_2 \frac{4}{m} y^2 - 2gy$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = \left(\frac{mg}{2} y - \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \right) l^{-2}$$

2.4. Symmetrien und Erhaltungssätze

20.11.17

\leadsto nun im Rahmen des Lagrange-Formalismus

Definition: Symmetrie bezeichnet die Invarianz unter bestimmten Transformationen

Beispiel: i) diskrete Symmetrien: $y = x^2$

Invariant bzgl. Spiegelung an der y-Achse



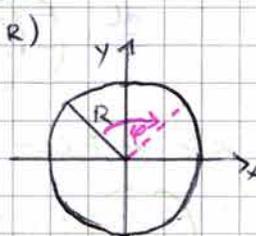
ii) kontinuierliche Symmetrie:

Kreis um Koordinatenursprung (Radius R)

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Invariant gegenüber beliebiger

Drehung (Winkel φ)



(kontinuierliche) Symmetrien spielen in der Physik eine zentrale Rolle.

Satz: Eine (kontinuierliche) Symmetrie eines Systems hat eine Erhaltsgröße zur Folge.

Noether-Theorem

Beweis wie zu Beispielen kommen, verwendet ein Hilfssatz:

Definition: $f(x)$ heißt homogene Funktion vom Grad n genau dann, wenn

$$f(\alpha x) = \alpha^n f(x) \quad (*)$$

Satz: Für eine homogene Funktion $f(x)$ vom Grad n gilt:

$$\sum_i x_i \frac{df(x_k)}{dx_i} = n f(x_k)$$

Beweis: Ausgehend von (*), nach Ableitung nach α :

$$\frac{d f(\alpha x_k)}{d\alpha} = \sum_i x_i \frac{df(\alpha x_k)}{d(\alpha x_i)} = \frac{d \alpha^n f(x_k)}{d\alpha} = n \alpha^{n-1} f(x_k) \quad / \cdot \alpha \quad (**)$$

$$\Rightarrow \sum_i \alpha x_i \frac{df(\alpha x_i)}{d(\alpha x_i)} = \frac{n \alpha f(x_i)}{= n f(\alpha x_i)}$$

; Einsetzen von (x) und Ersetzen von $\alpha x_i \rightarrow x_j$

$$\Rightarrow \sum_j x_j \frac{df(x_j)}{dx_j} = n f(x_j) \quad \text{qed.}$$

Beispiel: $\sum_{i=1}^n \dot{q}_i \frac{dT(\dot{q}_i)}{d\dot{q}_i} \stackrel{(\ast\ast)}{=} 2T \quad (\ast\ast\ast)$

mit $T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{q}_i^2$

als homogene Funktion vom Grad $n=2$

2.4.1. Erhaltung der Energie

gegeben sei folgende Symmetrie: „Homogenität der Zeit“

d.h. Invarianz gegenüber Translationen in der Zeit, also: $t \mapsto t + t_0$

Wir betrachten konservative Systeme, d.h. es gilt:

$$L = L(q_i, \dot{q}_i, t) = T(q_i, \dot{q}_i) - U(q_i, t)$$

keine Zeitabhängigkeit (explizite)

d.h. $\frac{dL}{dt} = 0$

Für die vollständige Ableitung $\frac{dL}{dt}$ hat dies zur Folge:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \left(\frac{dL}{dq_i} \dot{q}_i + \frac{dL}{d\dot{q}_i} \ddot{q}_i \right) + \frac{dL}{dt} \stackrel{=0}{=}$$

mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichung 2. Art:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \left(\frac{d}{dt} \frac{dL}{d\dot{q}_i} \dot{q}_i + \frac{dL}{d\dot{q}_i} \ddot{q}_i \right) = \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{q}_i} \dot{q}_i \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{dL}{d\dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) = 0$$

=: H als sog. Hamilton Funktion

ist eine Erhaltungsgröße!

Frage: Welche Erhaltungsgröße?

Zur Beantwortung dieser Frage formen wir H um:

$$H = \sum_i \dot{q}_i \frac{dL}{d\dot{q}_i} - L \quad ; \quad \text{mit } L = T(q_i, \dot{q}_i) - U(q_i)$$

$$= \sum_i \dot{q}_i \frac{dT}{d\dot{q}_i} - L$$

$$\stackrel{(\ast\ast\ast)}{=} 2T$$

$$= 2T - L = 2T - (T - U)$$

$$\Rightarrow H = T + U \quad \text{als Gesamtenergie!}$$

mögliche Klausurfrage:

Was hat die Invarianz gegenüber über der Translation der Zeit zur Folge?

Auswort: Gesamtenergie-Erhaltung!

d.h. die „Homogenität der Zeit“ liefert die Energieerhaltung,
genauer die Erhaltung der Gesamtenergie!

2.4.2. Impuls:

Betrachte als Symmetrie: Homogenität des Raumes

d.h. Invarianz gegenüber einer Verschiebung $\vec{r} \mapsto \vec{r} + \vec{b}$

Wir betrachten erneut ein konservatives System, d.h. $L = T - U$

$$\underline{L(\vec{r} + \vec{b}, \dot{\vec{r}}) - L(\vec{r}, \dot{\vec{r}})} \stackrel{\text{Taylor Entwicklung, 1. Ordnung}}{=} \vec{b} \cdot \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} + \dots \stackrel{!}{=} 0$$

verallgemeinert: $\sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0$

Euler-Lagrange-Gl.: $\frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \right) = 0$

= \vec{p} ist eine Erhaltungsgröße

Welche Erhaltungsgröße?

Dazu: $\vec{p} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i}$ aus $L = T - U = T(q_i, \dot{q}_i, t) - U(q_i, t)$
 $= \sum_i m \dot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i \frac{1}{2} m \dot{q}_i^2$

als Gesamtimpuls

d.h. die Homogenität des Raumes hat die Erhaltung des
Gesamtimpulses zur Folge!

Bemerkung: Falls L ~~invariant~~ unabhängig von einer Variablen q_k

(d.h. falls $\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$) so ist L invariant gegen eine Verschiebung

$$q_k \mapsto q_k + b \quad (\text{für ein festes } k)$$

Man nennt q_k dann zyklische Koordinate.

Aus der Euler-Lagrange-Gleichung folgt dann

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = 0 \quad (\text{wegen } \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0)$$

$p_k := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ heißt generalisierter Impuls :

(oder „Impuls zur generalisierten Koordinate q_k “)

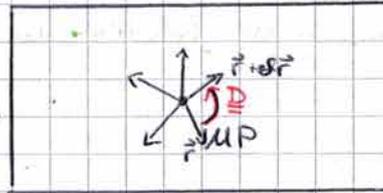
2.1.3. Drehimpuls

Symmetrie: Isotropie des Raumes

Invarianz unter räumlicher Drehung \underline{D}

$$\underline{\vec{r}} \Rightarrow \underline{D} \underline{\vec{r}} \approx \underline{\vec{r}} + \underline{\delta \vec{r}}$$

(als Transformation)



Vakuum

Folge: Invariant unter Drehung \Rightarrow Länge bleibt erhalten

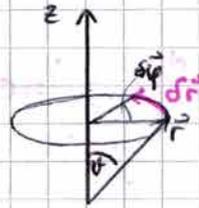
$$|\underline{\vec{r}}| = |\underline{\vec{r}} + \underline{\delta \vec{r}}|$$

$$\underline{r}^2 = (\underline{\vec{r}} + \underline{\delta \vec{r}})^2 = \underline{r}^2 + 2 \underline{\delta \vec{r}} \cdot \underline{\vec{r}} + \underline{\delta \vec{r}}^2$$

in 1. Näherung (also für kleine $\underline{\delta \vec{r}}$):

$$\underline{r}^2 \approx \underline{r}^2 + \underbrace{2 \underline{\delta \vec{r}} \cdot \underline{\vec{r}}}_{=0} + \underline{\delta \vec{r}}^2$$

$$\Rightarrow \underline{\delta \vec{r}} \perp \underline{\vec{r}}, \text{ da } \underline{\delta \vec{r}} \cdot \underline{\vec{r}} = 0$$



geometrisch: $|\underline{\delta \vec{r}}| = r \sin \varphi \approx r \delta \varphi$

$$\underline{\delta \vec{r}} = \underline{\delta \varphi} \times \underline{\vec{r}}$$

bzw.
$$\underline{\delta r}_i = \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ijk} \cdot \delta \varphi_j \cdot r_k \quad (\text{I})$$

mit
$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i, j, k \text{ zyklisch} \\ -1, & \text{falls } i, k, j \text{ antizyklisch} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \begin{matrix} (1,2,3) \\ (1,3,2) \end{matrix}$$

Levi-Civita-Tensor

nach $\frac{d}{dt}$ auf (I) folgt:
$$d v_i = \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ijk} \delta \varphi_j \cdot v_k \quad (\text{II}) \quad \text{mit } v_k = \frac{d r_k}{dt} = \dot{r}_k$$

Daraus ergibt sich aus der Invarianz bzgl. Drehung \underline{D} :

$$\underline{L}(\underline{r}_i + \underline{\delta r}_i, \underline{v}_i + \underline{\delta v}_i, t) - \underline{L}(\underline{r}_i, \underline{v}_i, t) \stackrel{!}{=} 0$$

nach Taylor-Entwicklung:
bzgl. $\underline{\delta r}_i$ und $\underline{\delta v}_i$



$$\frac{\partial L}{\partial r_i} \delta r_i + \frac{\partial L}{\partial v_i} \delta v_i = 0$$

EL-Gl. mit $v_i = \dot{r}_i$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial r_i}$$

$= p_i = p_i$

als generalisierter Impuls

also:
$$\frac{d}{dt} (p_i) \delta r_i + p_i \delta v_i = 0$$

mit (I) mit (II)

$$\frac{dp_i}{dt} \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} \delta \varphi_j r_k + p_i \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} \delta \varphi_j \underbrace{v_k}_{= \frac{dr_k}{dt}} = 0$$

Produktregel
"rückwärts" $\Rightarrow \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} \delta \varphi_j \frac{d}{dt} (p_i r_k) = 0$

Zur physikalischen Deutung formen wir weiter um:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} p_j r_k \right) = 0$$

$$= (\vec{r} \times \vec{p})_i$$

also: $L_i = (\vec{r} \times \vec{p})_i$ als i -te Komponente des Drehimpulses ist eine Erhaltunggröße!

Bemerkung: Bei Reduzierung auf Zylindersymmetrie (ausgezeichnete Achse):



Drehung um die ausgezeichnete (z.B. z) Achse:

$$\varphi \mapsto \varphi + \delta\varphi$$

Folge: L ist unabhängig von φ

EL-Funktion = L

$\Rightarrow \varphi$ ist eine zyklische Koordinate
 $\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \varphi}$ ist eine Erhaltunggröße

Beispiel: Sei $L = T - U$ (wie fast immer)

gegeben für einen Massenpunkt; d.h.

$$L = \frac{1}{2} m v^2 - U \quad \text{mit } v^2 = (\dot{\vec{r}})^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$$

in Zylinder-Koordinaten:

$$\left. \begin{array}{l} x = r \sin \varphi \\ y = r \cos \varphi \\ z = z \end{array} \right\} \text{damit } v^2 = (r \dot{\sin \varphi})^2 + (r \dot{\cos \varphi})^2 + \dot{z}^2$$

$$= (\dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi)^2 + (\dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + \dot{z}^2$$

$$= (\dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi)^2 + (\dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + \dot{z}^2$$

$$= \dot{r}^2 \sin^2 \varphi + 2 \dot{r} r \dot{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi + r^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi + \dots$$

$$+ \dot{r}^2 \cos^2 \varphi - 2 \dot{r} r \dot{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi + \dot{z}^2$$

$$= \dot{r}^2 \underbrace{(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)}_{=1} + r^2 \dot{\varphi}^2 \underbrace{(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)}_{=1} + \dot{z}^2$$

$$\Rightarrow v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2$$

Damit erhalten wir als Lagrange-Funktion

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - U$$

$$\Rightarrow \frac{dL}{d\dot{\varphi}} = \frac{1}{2} m r^2 2\dot{\varphi}$$

$$= m r^2 \dot{\varphi}$$

$$= L_z \text{ (in Zylinderkoordinaten)}$$

als z-Komponente des Drehimpulses, bleibt erhalten!

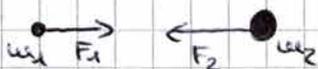
2.5. Bewegungen im „Zentralfeld“

Ausgangspunkt:

2.5.1. Das Zweikörperproblem

Zwei Körper (Masse m_1 und m_2) üben eine (anziehende) Kraft

aufeinander aus:



Die Lagrange-Funktion lautet somit:

$$L = T - U = T_1 + T_2 - U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^2}_{\text{denn L ist additiv}} - \underbrace{U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)}_{\text{Relativbewegung}} \quad L(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, t)$$

→ Schwerpunktsbewegung

Idee zur Vereinfachung: Einführung von Schwerpunktskoordinaten

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

und die Relativkoordinaten: $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$

$$\text{Somit gilt: } \vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad \text{und} \quad \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

Damit erhalten wir als Lagrange-Funktion:

$$L = \underbrace{\frac{m_1 + m_2}{2} \dot{\vec{R}}^2}_{\text{Schwerpunktsbewegung}} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}}^2}_{\text{Relativbewegung}} - U(|\vec{r}|) \quad L(\vec{R}, \vec{r}, \dot{\vec{R}}, \dot{\vec{r}}, t)$$

→ $L = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 - U(r)$, mit $|\vec{r}| = r$ $U(r)$ heißt Zentralfeld

Dabei haben wir die sog. reduzierte Masse μ definiert über

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad \text{denn: } \frac{1}{\mu} = \frac{m_2 + m_1}{m_1 m_2} \Leftrightarrow \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Bemerkung: Bei Gleichheit der Massen m_1 und m_2 erhalten wir:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \Rightarrow \mu = \frac{1}{2} m_1 < m_1, m_2$$

also eine reduzierte Masse!

ii) Wichtig: Die Lagrange-Funktion hängt nur noch von einem Koordinatenvektor \vec{r} ab!

iii) Das Zweikörperproblem wurde durch Relativkoordinaten und den Begriff der reduzierten Masse auf ein effektives 1-Körperproblem zurückgeführt.

27.11.17

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

$$L = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + U(r); \text{ mit } U(r) \text{ heißt Zentralfeld}$$

iv) Für eine ausgezeichnete Richtung z haben wir bereits gezeigt:

$$L_z = (\vec{r} \times \vec{p})_z \text{ ist eine Erhaltungsgröße}$$

$$\text{in } Z\text{-Koordinaten: } L_z = \mu r^2 \dot{\varphi} \quad (\text{I}) \quad (*)$$

v) 2. Kepler'sches Gesetz



„Die Fläche unter dem „Fahrtstrahl“

bleibt zeitlich konstant“

Beweis: Für sehr kleine Winkeldifferenz $d\varphi$ erhalten wir:

$$dA = \frac{1}{2} r \cdot r d\varphi \quad | \cdot \frac{1}{dt}$$

$$\Rightarrow \dot{A} = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}$$

$$(*) \Rightarrow \dot{A} = \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{L_z}{\mu r^2} \right) = \frac{L_z}{2\mu} = \text{const.} \quad (\text{da } L_z \text{ Erhaltungsgröße})$$

q.e.d.

vi) Neben L_z bleibt auch die Gesamtenergie erhalten:

$$E = \frac{1}{2} \mu v^2 + U(r) = \text{const.}$$

mit $v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2$ (siehe letzte Vorlesung)

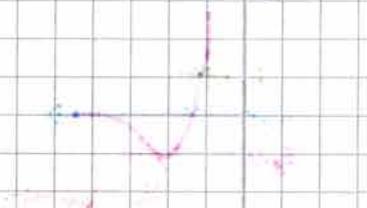
$$= \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \mu r^2 \dot{\varphi}^2 + U(r) \quad \text{mit } L = \mu r^2 \dot{\varphi}$$

$$= \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{L^2}{2\mu r^2}}_{\text{Zentrifugalpotential}} + U(r) \quad \text{Zentralpotential}$$

$$= U_{\text{eff}}^L(r) \text{ als effektives Potential!}$$

$L_z = L$,
wichtig ist
nur, dass die
Achse ausgezeichnet
ist!

$$\left. \begin{array}{l} \text{(II)} \quad E = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + U_{\text{eff}}^L(r) \\ \text{(I)} \quad L = \mu r^2 \dot{\varphi} \end{array} \right\} \text{Erhaltungsgrößen}$$



vii) aus (I) folgt: $d\varphi = \frac{L}{mr^2} dt$ (*)

aus (II) folgt: $dt = \pm \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{\text{eff}}(r))}}$

Idee: setze $dt = \dots$ in (*) ein:

$$\Rightarrow \varphi = \pm \int \frac{L r^2 dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{\text{eff}}(r))}} + \text{const.}$$

$$\boxed{\varphi(r) = \pm \int \frac{L r^2 dr}{\sqrt{2m(E - U_{\text{eff}}(r) - \frac{L^2}{2r^2})}} + \text{const.}} \quad (\text{III})$$

als allgemeine Lösung des Zentralfeldproblems

2.5.2. Das Kepler-Problem (Planetenbahnen):

$U(r)$ als Zentralfeld sei gegeben durch:

$$U(r) = -\alpha \frac{1}{r} ; \text{ mit } \alpha > 0 \rightarrow \text{Anziehung}$$

Damit erhalten wir für das zu lösende Integral in (III):

$$\varphi = - \int \frac{dw}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \frac{2m\alpha}{L^2} w - w^3}}$$

nach Substitution von $w = \frac{1}{r}$

mit $p := \frac{L^2}{2m\alpha}$ als Bahnparameter

und $e := \sqrt{1 + \frac{E L^2}{m\alpha^2}}$ als Exzentrizität

Damit erhalten wir insgesamt:

wegen $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\arccos x + c$

$$\boxed{\varphi = \arccos\left(\frac{p}{r} - 1\right)} \quad \text{als Bahngleichung} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \cos \varphi = \frac{1}{e} \left(\frac{p}{r} - 1 \right)$$

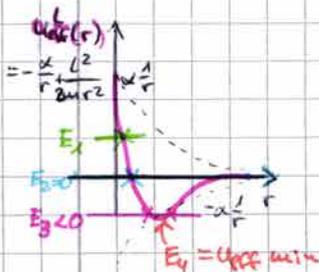
$$\Rightarrow \boxed{\frac{p}{r} = 1 + e \cos \varphi} \quad (2)$$

Bemerkung: Jeweils relative Größe der Parameter, insbesondere

der Exzentrizität e ergeben sich qualitativ unterschiedliche

Bahnen:

e	> 1	$= 1$	< 1	$= 0$
E	> 0	$= 0$	< 0	(Ueff) min
Bahn	Hyperbel	Parabel	Ellipse	Kreis
	ungebundene Bahnen		gebundene Bahnen	



nicht
Bahnkurve!
das ist nur r(t)

Bemerkung zur Kepler'schen Folgerung:

Aus dem Flächensatz (2. Kepler'sches Gesetz) wissen wir:

$$\frac{dA}{dt} = \dot{A} = \frac{L}{2m} = \text{const.}$$

$$\Rightarrow \int dA = \int \frac{L}{2m} dt$$

$$\Rightarrow A = \frac{L}{2m} T$$

Für Ellipsen gilt: $A = \pi ab$ (Kreis $A_0 = \pi R^2$) $\left(\frac{a}{b}\right)$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi m}{L} ab \quad ; \quad \text{mit } a = \frac{p}{1-e^2} = \frac{\alpha}{2|E|}$$

$$\text{und } b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{L}{\sqrt{2m|E|}}$$

$$\forall T(m, E) \Rightarrow T = \pi \alpha \sqrt{\frac{m}{2|E|^3}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\alpha}} a^{3/2}$$

$$\Rightarrow T^2 \propto a^3 \quad \text{3. Kepler'sches Gesetz}$$

$$\Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

01.12.17

3. Hamilton Formalismus

bisher: Lagrange-Formalismus ausgehend von der Lagrange-Funktion:

$$L = L(q_i, \dot{q}_i, t) \quad i = 1, \dots, N \text{ als Zahl der Freiheitsgrade}$$

Liefert Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

mit dem kanonischen (oder generalisierteren) Impuls

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

Bemerkung: d.h. es gilt $\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$ als Newton'sche Bewegungsgleichung

$$\left(\text{vgl. } \frac{dp_i}{dt} = \vec{F} \right)$$

3.1. Hamilton Funktion und Hamilton'sche Bewegungsgleichungen

Wir hatten bereits gesehen:

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L \text{ ist Erhaltungsgröße (Gesamtenergie)}$$

Umkehrieren wir allgemein als Hamilton-Funktion

$$H(p_i, q_i, t) := \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t) \Big|_{\dot{q}_i = \dot{q}_i(p_i)}$$

Bemerkung: i) Den Übergang $L(q_i, \dot{q}_i, t) \rightarrow H(p_i, q_i, t)$

heißt man auch Legendre-Transformation (math.)

ii) Wir bilden nun das totale Differential von H :

$$dH(p_i, q_i, t) = \underbrace{d(\sum_i p_i \dot{q}_i)}_{\text{Produktregel}} - dL(q_i, \dot{q}_i, t)$$

$$= \sum_i (dp_i) \dot{q}_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i - \left(\sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt \right)$$

$\frac{\partial L}{\partial q_i} = p_i$ $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i$

$$= \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i p_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

vgl. allg.: $dH(p_i, q_i, t) = \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt$

Koeffizientenvergleich liefert also neben $\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$

die sogenannten Hamilton'schen Gleichungen:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (\text{I})$$

$$\text{und } \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (\text{II})$$

Hamilton'sche Gleichungen

iii) Diese Gleichungen sind (wie zu erwarten) symmetrisch in p und q !

iv) Im Gegensatz zu der einen Euler-Lagrange Gleichung als DGL zweiter Ordnung, haben wir hier zwei DGL erster Ordnung

Beispiel: L sei gegeben durch $L = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - U(q) = "T - U"$

Daraus erhalten wir

i) Euler-Lagrange-Gl.: $m\ddot{q} + \frac{\partial U}{\partial q} = 0$

ii) kanonischer Impuls: $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$

umkehrbar, d.h. $\dot{q} = \frac{p}{m} = \dot{q}(p)$

einsetzen in die Legendre-Transformation

Damit erhalten wir als Hamilton Funktion:

$$H(p, q) = p\dot{q} - L \Big|_{\dot{q} = \dot{q}(p)} = \frac{p^2}{m}$$

$$= \frac{p^2}{m} - \left(\frac{m}{2} \left(\frac{p}{m} \right)^2 - U(q) \right)$$

$$= \frac{p^2}{m} - \frac{m}{2} \frac{p^2}{m^2} + U(q)$$

$$\Rightarrow H(p, q) = \frac{1}{2m} p^2 + U(q)$$

iii) aus H können wir nun die Hamilton'schen Gleichungen

aufstellen:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad (\text{I})$$

$$\text{und } \dot{p} = \frac{\partial H}{\partial q} = - \frac{\partial U}{\partial q} \quad (\text{II})$$

Einsetzen von (II) in $\frac{d(\text{I})}{dt}$ liefert (für $\frac{dq}{dt} = 0$):

$$\ddot{q} + \frac{1}{m} \frac{\partial U}{\partial q} = 0 \quad (\hat{=} \text{Euler-Lagrange-Gleichung})$$

gilt für alle konservativen Kraftfelder!

Achtung: Der Hamilton-Formalismus wird für den Übergang von der klassischen Mechanik zur Quantenmechanik benötigt!

Dabei noch sehr hilfreich:

3.2. Poisson-Klammer

Ausgehend von zwei Größen $G(p_i, q_i, t)$ und $F(p_i, q_i, t)$

definieren wir im Hamilton-Formalismus:

$$\{F, G\} = \sum_k \left(\frac{\partial F}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial G}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial G}{\partial q_k} \right) \quad \text{Poisson-Klammer}$$

Bemerkung: i) Die Poisson-Klammer hat folgende mathematische

Eigenschaften (Rechenregeln):

$$\bullet \{G, F\} = -\{F, G\} \quad (\text{Antisymmetrie})$$

$$\bullet \{F_1, F_2, G\} = F_1 \{F_2, G\} + \{F_1, G\} F_2 \quad (\text{„Produktregel“})$$

$$\bullet \{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0 \quad (\text{Jacobi-Identität})$$

ii) spezielle Beispiele:

$$\begin{aligned} 1) \{q_i, p_j\} &= \sum_k \left(\underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial q_k}}_{=\delta_{ik}} \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial p_k}}_{=\delta_{jk}} - \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial p_k}}_{=0} \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial q_k}}_{=0} \right) \\ &= \sum_k \delta_{ik} \delta_{jk} = \delta_{ij} \end{aligned}$$

$\delta_{ik} + \delta_{jk}$
Kronecker-Delta

$$\Rightarrow \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$$

$$\text{analog: } \{q_i, q_j\} = 0 \quad \text{und} \quad \{p_i, p_j\} = 0$$

2) Zudem lässt sich zeigen:

$$\{p_i, H\} = \sum_k \underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial q_k}}_{=0} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial p_k}}_{=\delta_{ik}} \frac{\partial H}{\partial q_k} = - \sum_k \delta_{ik} \frac{\partial H}{\partial q_k} = - \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (*)$$

$$\text{analog: } \{q_i, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (**)$$

Damit lassen sich die Hamilton'schen Gleichungen schreiben als:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (**)$$

\Leftrightarrow

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\}$$

$$\text{und } \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

$(*)$

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\}$$

sogenannte „kanonische“ Form der Hamilton'schen Gleichungen

jetzt
symmetrisch!

iii) Definition: Eine Transformation $q \rightarrow a$, $p \rightarrow \tilde{a}$, die die Poisson-Klammern invariant lässt (d.h. $\{a_i, \tilde{a}_j\} = \delta_{ij}$) heißt kanonisch!

iv) Für die zeitliche Änderung $\frac{dF}{dt}$ einer Größe $F(p_i, q_i, t)$

lässt sich mit Hilfe der Poisson-Klammer schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) + \frac{\partial F}{\partial t} \\ &= \underbrace{\sum_i \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial q_i} \right)}_{= \{F, H\}} + \frac{\partial F}{\partial t} \\ &= \{F, H\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Beispiel: Sei $F = H$ als Hamilton-Funktion

$$\frac{dH}{dt} = \underbrace{\{H, H\}}_{= 0} + \frac{\partial H}{\partial t}$$

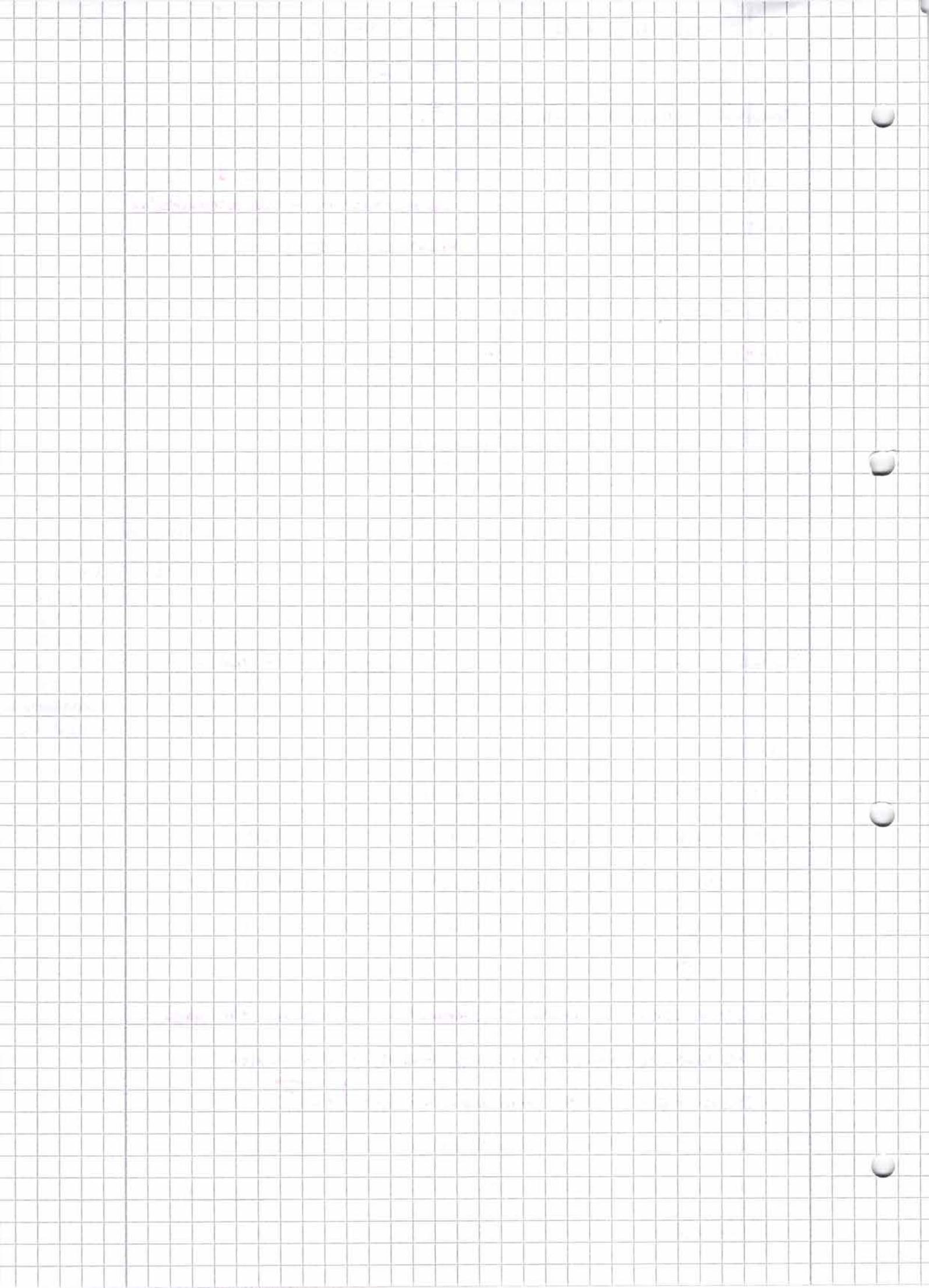
$$\Rightarrow \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

Deutung: Es gilt also $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$;

d.h. Falls die Lagrange-Funktion nicht explizit zeitabhängig

ist, so ist die Hamilton-Funktion (d.h. die

Gesamtenergie) eine Erhaltungsgröße!



6. Relativitätstheorie

1. Beobachtung: $\square \vec{B} = 0$ als elektrodynamische Wellengleichung ist nicht Galilei invariant!

stattdessen: Gibt sie auf einen Zusammenhang der Form:

$$n (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = \text{const.}$$

→ Dies führt uns auf den Begriff der Lorentz-Invarianz (≠ Invarianz gegenüber Lorentz-Transformation)

2. Definition: Lorentz-Transformation

- Σ, Σ' seien zwei Inertialsysteme
- Σ' bewege sich mit konstanter Geschwindigkeit v in x -Richtung (relativ zum Inertialsystem Σ)

Dann gilt als Zusammenhang zwischen Σ, Σ' :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}}_{\Sigma'} = \begin{pmatrix} \cosh(\eta) & -\sinh(\eta) \\ -\sinh(\eta) & \cosh(\eta) \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}}_{\Sigma} \quad \left. \vphantom{\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}} \right\} \text{als Lorentz Transformation}$$

$$\text{mit } \beta = \frac{v}{c} \quad \text{und } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

lässt sich auch schreiben:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

3. Folgen: i) Es gilt: $(ct')^2 - x'^2 = (ct)^2 - x^2 = \text{const.}$

$$\text{allgemein: } (ct')^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = \underbrace{(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2}_{\text{ist invariant}} \quad (\text{s.o.})$$

heißt (Minkowski) Abstand in der relativistischen Raumzeit!

ii) Vergleich: Lorentz- vs. Galilei-Transformation

in unserem Beispiel:

Lorentz	Galilei
$\begin{aligned} t' &= \gamma \left(t - \frac{v}{c} x \right) \\ x' &= \gamma (x - vt) \end{aligned}$	$\begin{aligned} t' &= t \\ x' &= x - vt \end{aligned}$
mit $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$	als nicht relativistischer Grenzfall!

iii) Sei $x=vt$ und $x'=0$. Dann erhalten wir:

$$t' = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \cdot t < t$$

„Zeitdilatation“ (Bewegte Uhren gehen langsamer)

iv) analog: $L' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot L$ „Längenkontraktion“

}

Kapitel 8

Differentialgleichungen

Motivation: Sehr viele physikalische Vorgänge lassen sich mathematisch durch Differentialgleichungen (DGL) beschreiben.

- Beispiele:**
- Schwingungsgleichung
 - Wärmeleitungsgleichung
 - Schrödingergleichung in der Quantenmechanik
 - Newtonsche Bewegungsgleichungen der Form

$$F(x, y, \dot{y}, \ddot{y}) = 0$$

hier: Beschränkung auf 1D gewöhnliche DGL und Systeme von diesen, d.h.:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Die höchste auftretende Ableitung ($n \in \mathbb{N}$) heißt Ordnung der DGL. Partielle DGL wie z.B. die 3-dimensionale Schrödingergleichung lassen sich i.a. durch geeignete Ansätze auf gewöhnliche DGL zurückführen!

- Fragen:**
- Existiert die Lösung?
 - Falls eine Lösung existiert, ist sie eindeutig?
 - Falls mehrere Lösungen existieren, wie sieht die Gesamtheit der Lösungen, also die allgemeine Lösung aus?
(Jede einzelne Lösung heißt dann „spezielle Lösung“!)

Es gibt viele DGL, für die man beweisen kann, dass sie eine Lösung haben, bei denen man aber keine explizite (analytische) Lösung angeben kann. Man kann für sie nur eine graphische oder numerische Lösung (am Rechner) bestimmen.

Als Physiker wissen wir, dass bei gegebenen Randbedingungen immer eine Lösung der Newtonschen Bewegungsgleichungen existiert, und zwar eine eindeutige. Eine entsprechende genauere/mathematischere Betrachtung lohnt sich aber democh:

8.1 Gewöhnliche DGL der 1. Ordnung

Gesucht ist die allgemeine Lösung $y(x), x \in I \subset \mathbb{R}$ einer DGL der Form:

$$y' = f(x, y(x)) \quad (8.1)$$

8.1.1 Das Iterationsverfahren von Picard-Lindelöf

Existenz der Lösung

Annahme Es existiert mindestens eine Lösung von $y' = f(x, y(x))$ mit $y(x_0) = y_0$ als Anfangsbedingung:

$$dy = f(x, y(x)) dx \quad (8.2)$$

Integration über die unabhängige Variable t von x_0 bis x liefert dann:

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

also ergibt sich eine Integralgleichung

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt, \quad (8.3)$$

bei der $y(x)$ als Lösung des Problems auch unter dem Integral steht. Gleichung 8.3 ist somit nur durch Iteration lösbar. Dazu setzt man zunächst in 0. Näherung

$$y_{(0)}(x) = y_0$$

Die 1. Näherung ist:

$$y_{(1)}(x) = y_0(x) + \int_{x_0}^x f(t, y_0(t)) dt$$

Analog fortfahrend erhält man als n -te Näherung:

$$y_{(n)}(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x f(t, y_{(n-1)}(t)) dt$$

und damit eine Funktionenfolge $\{y_n(x)\}; n \in \mathbb{N}$.

Die Betrachtung dieser Funktionenfolge führt auf folgenden Satz:

Existenz und Eindeutigkeitsatz von Picard-Lindelöf:

Gegeben sei $y' = f(x, y)$ im Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$. Ist $f(x, y(x))$ in G Lipschitzstetig, so existiert für jedes $(x_0, y_0) \in G$ genau eine Lösung, die die Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ erfüllt.

Bevor wir zum eigentlichen Beweis dieses Satzes kommen, zuvor noch ein paar Bemerkungen zur Klärung einiger Begriffe sowie ein paar Beispiele zur Illustration:

i) Lipschitzstetig heißt: Eine stetige Funktion erfüllt zusätzlich die Bedingung (für alle $(x, y_1), (x, y_2) \in G$):

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq N|y_2 - y_1|, \text{ mit } N > 0$$

ii) Man hat oft die DGL in der Form $y' = f(x, y)$. Besitzt ein stetiges $f(x, y)$ in einem Gebiet G eine beschränkte partielle Ableitung nach y , d.h.

$$\left| \frac{\partial f(x, y(x))}{\partial y} \right| < N' \text{ mit } N' > 0$$

so ist $f(x, y)$ sicher lipschitzstetig in G .

Beweis: Aus der Definition der Lipschitz-Stetigkeit folgt:

$$\frac{|f(x, y_2) - f(x, y_1)|}{|y_2 - y_1|} \leq N$$

sowie im Grenzübergang $y_2 \rightarrow y_1$ die Behauptung:

$$\left| \frac{\partial f(x, y(x))}{\partial y} \right| = \left| \lim_{y_2 \rightarrow y_1} \frac{f(x, y_2) - f(x, y_1)}{y_2 - y_1} \right| \leq N \quad \blacksquare$$

Beispiel I:

Die Gleichung

$$y'(x) = x \cdot y^2(x)$$

hat eine eindeutige Lösung, weil die Ableitung

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x \cdot y(x)$$

in jedem Gebiet G beschränkt ist. Die Lösung der Gleichung (wie man sie bestimmt werden wir später sehen) ist:

$$y(x) = \frac{2}{k - x^2}$$

Beispiel II:

Gleiches gilt für alle DGL der Form

$$y'(x) = h(x),$$

da die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ für alle x und $y(x)$ verschwindet und somit ebenfalls in jedem Gebiet G beschränkt ist.

Beispiel III:

Die Gleichung

$$y'(x) = \frac{x}{y(x)}$$

hat dagegen keine eindeutige Lösung, weil die Ableitung

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2(x)}$$

nicht immer beschränkt ist (in $y(x) = 0$ divergent!).

Beweis der Existenz der Lösung

Für die Differenz der 2. und 1. Näherung ergibt sich:

$$\begin{aligned} |y_{(2)}(x) - y_{(1)}(x)| &= \left| \int_{x_0}^x f(t, y_{(1)}(t)) dt - \int_{x_0}^x f(t, y_{(0)}(t)) dt \right| \\ &\leq \int_{x_0}^x |f(t, y_{(1)}(t)) - f(t, y_{(0)}(t))| dt \\ \text{falls lipschitzstetig} &\leq N \int_{x_0}^x |y_{(1)}(t) - y_{(0)}(t)| dt \end{aligned}$$

also ergibt sich, mit $M = \max_{t \in [x_0, x]} |f(t, y_{(1)}(t)) - f(t, y_{(0)}(t))|$:

$$|y_{(1)}(t) - y_{(0)}(t)| \leq NM|x - x_0|$$

Mit Hilfe dieser Ungleichung beweist man, durch vollständige Induktion (für $n = 1$ ist die Aussage sicher richtig, s.o.), dass:

$$\left| y_{(n+1)}(t) - y_{(n)}(t) \right| \leq MN^n \frac{|x - x_0|^n}{n!}$$

$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ (Quotientenkriterium)

$$\Rightarrow y_{(n)}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y(x) \quad \blacksquare$$

Eindeutigkeit der Lösung

Ist die Lösung eindeutig?

Beweis der Eindeutigkeit der Lösung

Nehmen wir an, es existieren zwei Lösungen $y_{(1)}(x)$ und $y_{(2)}(x)$, d.h., $y_{(1)}(x)$ und $y_{(2)}(x)$ erfüllen die Integralgleichung 8.3. Dann:

$$\begin{aligned} |y_{(2)}(t) - y_{(1)}(t)| &= \left| \int_{x_0}^t f(t, y_{(2)}(t)) dt - \int_{x_0}^t f(t, y_{(1)}(t)) dt \right| \\ &\leq NM|x - x_0| \text{ siehe oben!} \end{aligned}$$

Durch vollständige Induktion zeigt man dann:

$$\begin{aligned} |y_{(n+1)}(t) - y_{(n)}(t)| &\leq MN^n \frac{|x - x_0|^n}{n!} \\ \Rightarrow |y_{(n+1)}(t) - y_{(n)}(t)| &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

d.h. es folgt die Eindeutigkeit der Lösung! \blacksquare

Beispiel

Es ist die DGL $y' = e^x - y^2$ mit der Anfangsbedingung $y(0)=y_0=0$ zu lösen.

Wegen $f(x, y) = e^x - y^2$ ist das Lipschitz-Kriterium in jedem Intervall erfüllt. Die Anwendung der Picardschen Methode der schrittweisen Approximation liefert:

$$\begin{aligned}
 y_{(1)}(x) &= \int_{x_0}^x f(t, y_0(t)) dt = \int_0^x e^t dt = e^x - 1 \\
 y_{(2)}(x) &= \int_{x_0}^x f(t, y_1(t)) dt = \int_0^x (3e^t - e^{2t} - 1) dt = \\
 &= 3e^x - \frac{1}{2}e^{2x} - x - \frac{5}{2} \\
 y_{(3)}(x) &= \int_{x_0}^x f(t, y_2(t)) dt = \dots
 \end{aligned}$$

Die Fortsetzung des Iterationsverfahren liefert eine immer genauere Lösung. Allerdings wird dabei auch der Rechenaufwand immer grösser...

8.1.2 Lösung durch partielles Raten – geeignete Ansätze

Die Tatsache, dass das Picard-Lindelöf Iterationsverfahren bereits nach wenigen Schritten kompliziert und mühsam werden kann, ist die Motivation für andere Lösungsverfahren. Oftmals helfen Ansätze weiter, d.h. man rät die ungefähre Form der Lösung, lässt aber bestimmte Parameter variabel.

Beispiel: Es ist die DGL $y' + a^2y = 0$ zu lösen.

Wir wählen einen **Exponentialansatz** der Form: $y = e^{\lambda x}$, denn wir wissen ja, dass $(e^x)' = e^x$ – was der zu lösenden DGL schon sehr nahe kommt. Einsetzen in die DGL liefert:

$$\begin{aligned}
 \lambda e^{\lambda x} + a^2 e^{\lambda x} &= 0 \\
 \lambda &= -a^2
 \end{aligned}$$

Einsetzen in den Ansatz liefert als spezielle Lösung:
 $y(x) = e^{-a^2 x}$

Exponentialansätze helfen sehr oft weiter, insbesondere deren komplexe Variante $e^{i\lambda x}$ bei sog. Schwingungsgleichungen, dies ist aber nicht immer der Fall. Dagegen kann man (fast) immer das Integral (Lösung) einer DGL als Potenzreihe der allgemeinen Form:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

schreiben. Die Lösung folgt durch Einsetzen dieses **Potenzreihenansatzes** in die DGL mit anschließendem Koeffizientenvergleich, so dass sich i.a. Rekursionsformeln für die a_n ergeben.

Beispiel: Wir betrachten erneut die DGL $y' + a^2y = 0$,

verwenden aber nun einen **Potenzreihenansatz** der Form

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{und damit} \quad y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$$

Einsetzen in die DGL liefert

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} + a^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

sowie nach Indexverschiebung in der zweiten Summe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} + a^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} = 0$$

und anschließendem Koeffizientenvergleich die Rekursionsformel:

$$\begin{aligned}
 a_n n + a^2 a_{n-1} &= 0 \\
 a_n &= \frac{-a^2}{n} \cdot a_{n-1}
 \end{aligned}$$

also

$$a_n = \frac{(-a^2)^n}{n!}$$

was wir sogleich als Koeffizienten der Taylorreihenentwicklung zu $y(x) = e^{-a^2 x}$ identifizieren. ■

8.1.3 Separation (Trennung) der Variablen

Das ganze geht auch etwas systematischer, d.h. ohne Rückgriff auf Ansätze, allerdings nur für DGL der speziellen Form $y' = g(y) \cdot h(x)$. Die rechte Seite muss also ein Produkt von Funktionen jeweils einer Variable darstellbar sein.

$$\text{Annahme: } f((x, y(x))) = g(y) \cdot h(x), \tag{8.4}$$

mit $x \in I_1 \subset \mathbb{R}$ und $y \in I_2 \subset \mathbb{R}$

Die Idee ist nun, alle Ausdrücke in y (inklusive dy) auf der einen Seite der Gleichung, die Ausdrücke in x (inklusive dx) auf der anderen Seite getrennt zu sammeln.

Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= y' = g(y) \cdot h(x) \\
 \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} &= h(x) dx
 \end{aligned}$$

d.h. es ergibt sich eine *Trennung der Variablen*. Integration von x_0 bis x liefert:

$$\int_{g(y(x_0))}^{g(y(x))} \frac{dy}{g(y)} = \int_{x_0}^x h(t) dt, \quad \text{mit } y(x_0) = y_0$$

Beispiele:

(i) Wir betrachten erneut die DGL: $y' + a^2y = 0$.

$$\frac{dy}{dx} = -a^2y \quad \text{und nach Trennung der Variablen} \quad \frac{dy}{y} = -a^2 dx$$

Aufintegrieren liefert zunächst $\ln y = -a^2x + c$
 und mit $c = \ln k$ die Lösung: $y(x) = k e^{-a^2x}$.

(ii) Zu Lösen ist die DGL $y' = x \cdot y^2$ mit $x > 0$. Man schreibt

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot y^2 \quad \text{und nach Trennung der Variablen} \quad \frac{dy}{y^2} = x \cdot dx$$

Aufintegrieren liefert zunächst

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int x \cdot dx \quad \text{also} \quad -\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + c$$

und mit $c = -\frac{k}{2}$ die Lösung:

$$y(x) = \frac{2}{k - x^2} \quad \text{für} \quad x \neq \pm\sqrt{k}$$

Bemerkungen:

(i) Oft kann man allgemeinere $f(x, y(x))$ durch geeignete Substitution auf die Produktform der Gleichung 8.4 bringen:

Beispiel 1 Gegeben sei $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$
 Substitution von $u = \frac{y}{x}$ liefert $y' = u'x + u$
 $\Rightarrow u' = (f(u) - u) \cdot \frac{1}{x}$
 also, tatsächlich die gewünschte Trennung der Variablen!

Beispiel 2 Gegeben sei $y' = f(ax + by + c)$
 Substitution von $u = ax + by + c$ liefert dann $y' = \frac{u'-a}{b}$
 $\Rightarrow u' = b \cdot f(u) + a$
 also, ebenfalls eine Vereinfachung!

(ii) Oft kann man die Integration vereinfachen, indem man von $f(x, y(x))$ einen Anteil $h(x)$ abspaltet und zunächst die sog. homogene DGL löst:

$$\begin{aligned} y' &= \tilde{f}(x, y) + h(x) \rightarrow \text{inhomogene DGL} && \hat{=} y' - f(x, y) = h(x) \text{ inhomogen} \\ \text{zunächst } y' &= \tilde{f}(x, y) \rightarrow \text{homogene DGL} && \hat{=} y' - f(x, y) = 0 \text{ homogen} \end{aligned}$$

Die (allgemeine) Lösung der inhomogenen DGL ergibt sich dann durch:

$$y_{\text{allg}}^{\text{inhom}}(x) = y_{\text{allg}}^{\text{hom}}(x) + y_{\text{spez.}}^{\text{inhom}}(x)$$

d.h. zu der Lösung der homogenen DGL braucht nur noch eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL addiert werden. Diese erhält man durch Raten, spezielle Ansätze oder etwas systematischer durch *Variation der Konstanten*: Hier nimmt man die Integrationskonstanten in der Lösung der homogenen DGL als x -abhängig an und setzt diesen Ansatz in die inhomogene DGL ein.

Beispiel:

Es ist die DGL: $y' - x^2y = x^5$ für die Anfangsbedingung $y(1) = 1$

zu lösen. Erstmal lösen wir die homogene DGL:

$$y' - x^2y = 0 \quad \text{oder} \quad y' = x^2y$$

Durch Trennung der Variablen bekommt man:

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y} &= \int x^2 dx \\ \ln |y| &= \frac{x^3}{3} + k \\ e^{\ln |y|} &= e^{\frac{x^3}{3} + k} \\ y &= c \cdot e^{\frac{x^3}{3}} \end{aligned}$$

wobei wir anstelle des konstanten c nun eine Funktion $c(x)$ benutzen. Die so gewonnene Lösung $y = c(x) \cdot e^{\frac{x^3}{3}}$ setzen wir als Ansatz in die inhomogene DGL ein:

$$c'(x) \cdot e^{\frac{x^3}{3}} + x^2 c(x) \cdot e^{\frac{x^3}{3}} - x^2 c(x) \cdot e^{\frac{x^3}{3}} = x^5$$

also:

$$c'(x) = x^5 e^{-\frac{x^3}{3}} \quad \text{und somit} \quad c(x) = \int x^5 e^{-\frac{x^3}{3}} dx$$

Integration liefert:

$$c(x) = -3e^{-\frac{x^3}{3}} \left(\frac{x^3}{3} + 1 \right) + c_1$$

also insgesamt

$$y(x) = -3 - x^3 + c_1 e^{\frac{x^3}{3}}$$

Bei gegebener Anfangsbedingung $y(1)=1$ ergibt sich $c_1 = 5e^{-\frac{1}{3}}$ und schliesslich:

$$y(x) = -3 - x^3 + 5e^{\frac{x^3-1}{3}} \quad \blacksquare$$

*Variation
der
Konstanten*

8.2 Gewöhnliche DGL n-ter Ordnung

In diesem Abschnitt werden nun die vorgestellten Lösungsverfahren auf Differentialgleichungen höherer Ordnung angewendet:

Differentialgleichungen der n -ten Ordnung können durch Ansätze ($c \cdot e^{\lambda x}$, $c \cdot x^\lambda$, $c \cdot \cos(x - x_0)$, usw.) gelöst werden. Dies gilt insbesondere für *lineare* DGL mit *konstanten Koeffizienten*, die bei den verschiedensten Schwingungsphänomenen die zentrale Rolle spielen:

Beispiel (i): Es ist die lineare DGL: $y''(x) + \omega_0^2 y(x) = 0$

des **harmonischen Oszillators** (ω_0 ist die Kreisfrequenz) zu lösen. Mit dem Ansatz: $y(x) = e^{\lambda x}$ wobei λ geeignet zu bestimmen ist, bekommt man:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\lambda x} \\ y'(x) &= \lambda e^{\lambda x} \\ y''(x) &= \lambda^2 e^{\lambda x} \end{aligned}$$

Einsetzen des Ansatzes in die DGL liefert:

$$\begin{aligned} \lambda^2 e^{\lambda x} + \omega_0^2 e^{\lambda x} &= 0 \\ \lambda^2 + \omega_0^2 &= 0 \end{aligned}$$

Dies führt zu: $\lambda = \pm i$ und die Fundamentallösung der DGL lautet:

$$y(x) = c_1 \cdot e^{i\omega_0 x} + c_2 \cdot e^{-i\omega_0 x}$$

Warum haben wir die allgemeine Lösung als Linearkombination zweier einzelnen Lösungen? Man betrachte Differentialgleichungen der Form:

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + a_0 y(x) = h(x)$$

Aufgrund der Linearität bilden die Lösungen einen n -dimensionalen Vektorraum, d.h. es existieren n linear unabhängige Lösungen, deren Linearkombination als Fundamentalsystem bezeichnet wird:

$$y_{\text{allg}} = \sum_{i=1}^n c_i y_i(x)$$

Wie bei DGL 1. Ordnung kann man zeigen, dass die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung gegeben ist, falls n Anfangsbedingungen gegeben sind:

$$y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \text{ für } n = 0, 1, \dots, n-1$$

allgemeine Lösungsstrategie

(1) Erstmals wird die Lösung der homogenen DGL (setze also $h(x) = 0$) durch einen Exponentialansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ gesucht. Der Ansatz führt auf

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0 = P_n(\lambda)$$

$P_n(\lambda)$ als charakteristisches Polynom besitzt n kompl. Nullstellen $\lambda_i \in \mathbb{C}$.

$y(x) = e^{\lambda_i x}$ löst die DGL genau dann, wenn λ_i eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist.

Damit haben wir die n unabhängige Lösungen $e^{\lambda_1 x}$, $e^{\lambda_2 x}$, ..., die wir für die allgemeine Lösung der DGL n -ter Ordnung benötigen, zumindest dann wenn alle λ_i unterschiedlich sind. Sind einige der λ_i μ_i -fach entartet (d.h. kommen sie als mehrfache Nullstellen vor), so fehlen allerdings einige. Sie sind:

$$x^j \cdot e^{\lambda_i x} \text{ mit } j = \{0, \dots, \mu_i\}$$

wo n_i die Vielfachheit der i -ten Lösung ist. Falls das charakteristische Polynom k unterschiedlichen Nullstellen hat, lautet die allgemeine Lösung der (mit beliebigen Koeffizienten c_{ij}):

$$y_{\text{allg}}(x) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\mu_i-1} c_{ij} \cdot x^j \cdot e^{\lambda_i x}$$

(2) Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL erhält man dann durch Addition einer speziellen Lösung derselben zur oben angegebenen allgemeinen Lösung der homogenen DGL.

Beispiel (ii): Es ist die DGL: $y(x)''' - 7y''(x) + 16y'(x) - 12y(x) = 0$

zu lösen. Das charakteristische Polynom ist:

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 = 0$$

hat die doppelte Nullstelle $\lambda = 2$ und die einfache Nullstelle $\lambda = 3$. Die Allgemeine Lösung ist damit:

$$y(x) = c_{10} e^{2x} + c_{11} x \cdot e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

Beispiel (iii): Es ist die lineare DGL: $y''(x) + 2\gamma y'(x) + \omega_0^2 y(x) = 0$

des **gedämpften harmonischen Oszillators** (ω_0 ist hier wieder die Grundfrequenz und γ die Dämpfungskonstante) zu lösen. Mit dem Exponentialansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ (siehe Beispiel (i)) erhalten wir als sog. charakteristisches Polynom:

$$\begin{aligned} \lambda^2 e^{\lambda x} + 2\gamma \lambda e^{\lambda x} + \omega_0^2 e^{\lambda x} &= 0 \\ \lambda^2 + 2\gamma \lambda + \omega_0^2 &= 0 \end{aligned}$$

Dies führt zu:

$$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

bzw. für den häufig auftretenden Fall, dass $\omega_0^2 \gg \gamma^2$:

$$\lambda = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

und die Fundamentallösung der DGL lautet:

$$y(x) = e^{-\gamma x} \left(c_1 \cdot e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} x} + c_2 \cdot e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} x} \right)$$

Beispiel (iv): Es ist die lineare DGL: $y''(x) + 2\gamma y'(x) + \omega_0^2 y(x) = F \cdot e^{i\omega x}$ der **erzwungenen Schwingung** ($F \cdot e^{i\omega x}$ als periodischer äußerer Antrieb) zu lösen.

Es handelt sich offensichtlich um eine inhomogene DGL. Die Lösung der zug. homogenen Gleichung kennen wir schon (siehe *Beispiel (iii)*). Wir benötigen also nur noch eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL. Mit dem Ansatz $y(x) = C \cdot e^{i\omega x}$ (mit $C \in \mathbb{C}$ konstant) erhalten wir:

$$\begin{aligned} y(x) &= C e^{i\omega x} \\ y'(x) &= i\omega C e^{i\omega x} \\ y''(x) &= -\omega^2 C e^{i\omega x} \end{aligned}$$

Einsetzen des Ansatzes in die DGL liefert:

$$-\omega^2 C e^{i\omega x} + i2\gamma\omega C e^{i\omega x} + \omega_0^2 C e^{i\omega x} = F \cdot e^{i\omega x}$$

$$\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega = \frac{F}{C}$$

$$C = \frac{F}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega}$$

Die gesuchte spezielle Lösung der inhomogenen DGL lautet also:

$$y_{\text{spez.}}^{\text{inhom}}(x) = \frac{F}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega} \cdot e^{i\omega x}$$

Somit ergibt sich als allgemeine Lösung der erzwungenen Schwingung:

$$y_{\text{allg.}}^{\text{inhom}}(x) = e^{-\gamma x} \left(c_1 \cdot e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} x} + c_2 \cdot e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} x} \right) + \frac{F}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega} \cdot e^{i\omega x}$$

Bemerkung: Für $F=0$ und $\gamma=0$, d.h. bei nicht vorhandenem äußerem Antrieb und fehlender Dämpfung ergibt sich wieder die Lösung des harmonischen Oszillators.

Wir haben uns nun das Handwerkszeug erarbeitet, um beliebige Newtonsche Bewegungsgleichungen zu lösen. Für einige Probleme (harmonische Schwingungen, gedämpfte Schwingungen und erzwungene Schwingungen) kennen wir sogar bereits die allgemeine mathematische Lösung. Wir müssen sie nur noch im folgenden physikalisch diskutieren:

8.3 Harmonische Schwingung

Viele schwingungsfähige System lassen sich (zumindest für kleine Auslenkungen) über die Schwingungsgleichung

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

beschreiben. Die DGL unterscheiden sich dabei nur darin, wie die Kreisfrequenz ω_0 von den Grundgrößen der konkreten Fragestellung abhängt. Gemäß *Beispiel*

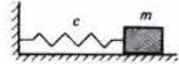
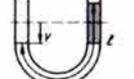
Schwingungssystem	Kraft und DGL	ω_0
 <p>Feder-Masse-System</p>	$F = ma$ $-cy = m\ddot{y}$ $\ddot{y} + \frac{c}{m}y = 0$	$\sqrt{\frac{c}{m}}$
 <p>mathematisches Pendel</p>	$F = ma$ $-mg\beta = m\ddot{\beta}$ $\ddot{\beta} + \frac{g}{l}\beta = 0$	$\sqrt{\frac{g}{l}}$
 <p>Torsionsschwinger</p>	$M = J_A \alpha$ $-c^*\beta = J_A \ddot{\beta}$ $\ddot{\beta} + \frac{c^*}{J_A}\beta = 0$	$\sqrt{\frac{c^*}{J_A}}$
 <p>physikalisches Pendel</p>	$M = J_A \alpha$ $-mgr\beta = J_A \ddot{\beta}$ $\ddot{\beta} + \frac{mgr}{J_A}\beta = 0$	$\sqrt{\frac{mgr}{J_A}}$
 <p>Flüssigkeitspendel</p>	$F = ma$ $-2\alpha p\gamma = m_{\text{eff}} \ddot{y}$ $\ddot{y} + \frac{2\alpha p\gamma}{m_{\text{eff}}}y = 0$ $\ddot{y} + \frac{2\alpha}{r}y = 0$	$\sqrt{\frac{2\alpha p\gamma}{m_{\text{eff}}}}$ $\sqrt{\frac{2\alpha}{r}}$

Abbildung 8.1: Beispiele für schwingfähige mechanische Systeme. Das Schwingverhalten all dieser Systeme kann (zumindest für kleine Auslenkungen) durch die DGL 2. Ordnung des harmonischen Oszillators beschrieben werden.

(i) des vorherigen Abschnitts kennen wir aber bereits die allgemeine mathematische Lösung:

$$x(t) = c_1 \cdot e^{i\omega_0 t} + c_2 \cdot e^{-i\omega_0 t}$$

Experimentell beobachtbar (als Amplitude der harmonischen Schwingung) ist dabei aber nur der Realteil der Lösung:

$$x(t) = \text{Re}\{x(t)\} = A \cos(\omega_0 t + \alpha)$$

Die Maximalamplitude A und die Phase α sind dabei freie Parameter, die durch die Anfangsbedingungen der Bewegung festgelegt werden. Die DGL beschreibt also tatsächlich einen zeitlich periodischen Vorgang, bei dem das System nach der Zeit

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

wieder in seinen ursprünglich Zustand zurückkehrt. T heisst daher auch *Schwingungsdauer*.

8.5 Erzwungene Schwingungen

Auch hier kennen wir bereits die allgemeine Lösung, siehe *Beispiel (iv)* des Abschnitts 9.2. Im Vergleich zum Falle der gedämpften Schwingung kommt nur die spezielle Lösung als zusätzlicher Term hinzu. Diesen gilt es nun noch zu diskutieren:

$$x_{\text{spez.}}^{\text{inhom}}(t) = C(\omega) \cdot e^{i\omega t}$$

$$\begin{aligned} \text{mit } C(\omega) &= \frac{F}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\gamma i\omega} = F \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - 2\gamma i\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \\ &= F \cdot \left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} - i \frac{2\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \right) \\ &= A(\omega) \cdot e^{i\alpha(\omega)} \end{aligned}$$

$$\text{mit der Amplitude } A(\omega) = |C(\omega)| = \frac{F}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$

$$\text{und der Phase } \tan \alpha(\omega) = \frac{\text{Im}\{C(\omega)\}}{\text{Re}\{C(\omega)\}} = \frac{2\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

Zur weiteren Diskussion wird erneut eine Fallunterscheidung notwendig:

1. Fall: $\omega \ll \omega_0 \Rightarrow$ **Grenzfall niedriger Anregungsfrequenz**

$\tan \alpha$ geht gegen null ($\alpha = \arctan(0) = 0$), d.h. es liegt *keine* zusätzliche Phasenverschiebung vor und die Lösung konvergiert gegen die der (gedämpften) harmonischen Schwingung.

2. Fall: $\omega \gg \omega_0 \Rightarrow$ **Grenzfall hoher Anregungsfrequenz**

Die Amplitude geht gegen null. Gleiches gilt für $\tan \alpha$. d.h. die Phasenverschiebung beträgt also π (oder 180°).

3. Fall: $\omega = \omega_0 \Rightarrow$ sog. **Resonanzfall**

Bei verschwindender Dämpfung (also $\gamma = 0$) ergibt sich bei $\omega = \omega_0$ die sog. Resonanzkatastrophe: $A(\omega_0) \rightarrow \infty$.

Liegt Dämpfung vor, so wird die Maximalamplitude nicht für $\omega = \omega_0$ angenommen, sondern wegen

$$\frac{dA(\omega)}{d\omega} = 0 \quad \text{bei} \quad \omega_{\text{max}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2},$$

also immer bei niedrigeren Frequenzen.

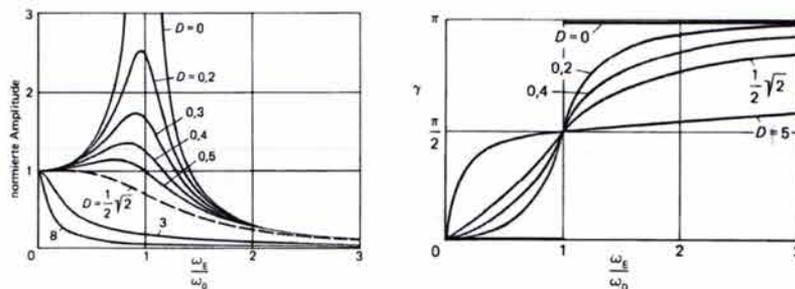


Abbildung 8.3: Graphische Darstellung des Resonanzverhaltens (*links*: Amplitude, *rechts*: Phase) erzwungener Schwingungen.

8.4 Gedämpfte Schwingungen

Auch hier kennen wir bereits die allgemeine Lösung, siehe *Beispiel (iii)* des Abschnitts 9.2. Erneut ist dabei nur der Realteil der allgemeinen mathematischen Lösung dem Experiment zugänglich:

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cdot \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \cdot t + \alpha)$$

Je nach relativer Stärke der Dämpfung kommt es dabei zu unterschiedlichen Effekten, wie der folgenden Fallunterscheidung zu entnehmen ist:

1. **Fall:** $\gamma = 0$, d.h. keine Dämpfung \Rightarrow **harmonische Schwingung**

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha)$$

2. **Fall:** $\omega_0 > \gamma \Rightarrow$ **normale Dämpfung**

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cdot \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \cdot t + \alpha)$$

3. **Fall:** $\omega_0 = \gamma \Rightarrow$ **aperiodischer Grenzfall**

Die resultierende Frequenz $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ verschwindet nominell und es ist nur noch der Dämpfungsterm wirksam:

$$x(t) = \tilde{A} e^{-\gamma t} \quad \text{mit } \tilde{A} = A \cdot \cos \alpha$$

Dies ist die schnellste Methode, um in die Ruhelage zurückzukehren, technische Nutzung z.B. bei kritisch gedämpften Zeigerinstrumenten, Schwingtüren, ...

4. **Fall:** $\omega_0 < \gamma \Rightarrow$ **Kriechfall**

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = i\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ wird rein imaginär, d.h. anstelle des Schwingungsterms ergibt sich nur ein weiterer Term zur Dämpfung:

$$x(t) = A e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t}$$

Das System ist *überdämpft*, nicht-schwingender, relativ langsamer Einlauf in die Ruhelage nach dem Exponentialgesetz.

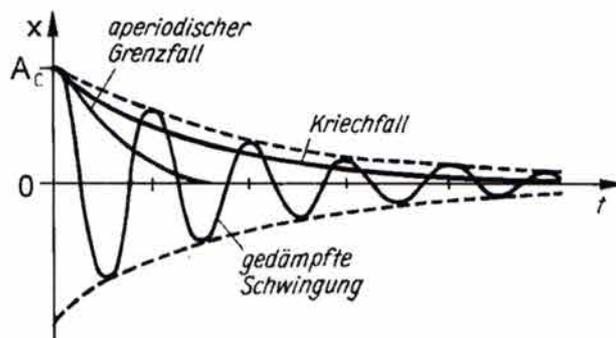


Abbildung 8.2: Zeitlicher Verlauf verschieden stark gedämpfter Schwingungen.

<i>Koordinatensystem</i>	kartesisch	zylindersymmetrisch	kugelsymmetrisch
Koordinaten u_i	$x \quad y \quad z$	$\varrho \quad \varphi \quad z$	$r \quad \vartheta \quad \varphi$
Ortsvektor \vec{r}	$x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$	$\varrho \cos \varphi \vec{e}_x + \varrho \sin \varphi \vec{e}_y + z\vec{e}_z$	$r \cos \varphi \sin \vartheta \vec{e}_x + r \sin \varphi \sin \vartheta \vec{e}_y + r \cos \vartheta \vec{e}_z$
Metrische Faktoren $h_i = \left \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \right $	$h_x = 1 \quad h_y = 1 \quad h_z = 1$	$h_\varrho = 1 \quad h_\varphi = \varrho \quad h_z = 1$	$h_r = 1 \quad h_\vartheta = r \quad h_\varphi = r \sin \vartheta$
Basisvektoren $\vec{e}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}$	$\vec{e}_x \quad \vec{e}_y \quad \vec{e}_z$	$\vec{e}_\varrho \quad \vec{e}_\varphi \quad \vec{e}_z$	$\vec{e}_r \quad \vec{e}_\vartheta \quad \vec{e}_\varphi$
Wegelement $d\vec{r} = \sum_i du_i h_i \vec{e}_i$	$dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$	$d\varrho \vec{e}_\varrho + \varrho d\varphi \vec{e}_\varphi + dz\vec{e}_z$	$dr\vec{e}_r + r d\vartheta \vec{e}_\vartheta + r \sin \vartheta d\varphi \vec{e}_\varphi$
Flächenelemente $d\vec{A}_i = \vec{e}_i \prod_{j \neq i} du_j h_j$	$d\vec{A}_x = dydz\vec{e}_x$ $d\vec{A}_y = dx dz\vec{e}_y$ $d\vec{A}_z = dx dy\vec{e}_z$	$d\vec{A}_\varrho = \varrho d\varphi dz\vec{e}_\varrho$ $d\vec{A}_\varphi = \varrho dz\vec{e}_\varphi$ $d\vec{A}_z = \varrho d\varphi d\varrho \vec{e}_z$	$d\vec{A}_r = r^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta \vec{e}_r$ $d\vec{A}_\vartheta = r \sin \vartheta d\varphi dr\vec{e}_\vartheta$ $d\vec{A}_\varphi = r d\vartheta dr\vec{e}_\varphi$
Volumenelement $dV = \prod_i h_i du_i$	$dx dy dz$	$\varrho d\varphi d\varrho dz$	$r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi$
Gradient $\text{grad } \Phi(\vec{r}) = \vec{\nabla} \Phi(\vec{r})$	$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \vec{e}_z$	$\frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} \vec{e}_\varrho + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \vec{e}_z$	$\frac{\partial \Phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$
Divergenz $\text{div } \vec{F}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{r})$	$\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial(\varrho F_\varrho)}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial(\sin \vartheta F_\vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}$
Rotation $\text{rot } \vec{F}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r})$	$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{matrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{\varrho} \frac{\partial F_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial F_\varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial F_\varrho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \varrho} \\ \frac{1}{\varrho} \frac{\partial(\varrho F_\varphi)}{\partial \varrho} - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial F_\varrho}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{e}_\varrho \\ \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_z \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{r \sin \vartheta} \left(\frac{\partial(\sin \vartheta F_\varphi)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial F_\vartheta}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r \\ + \left(\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r F_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{e}_\vartheta \\ + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r F_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \vartheta} \right) \vec{e}_\varphi \end{matrix}$
LAPLACE-Operator $\Delta \Phi(\vec{r})$	$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\varrho \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} \right) + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}$

Zylinderkoordinaten

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

Einheitsvektoren: Tangentialvektoren an den Koordinatenlinien

$$\vec{e}_\rho = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ableitung der Einheitsvektoren

$$\dot{\vec{e}}_\rho = \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi, \quad \dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \vec{e}_\rho, \quad \dot{\vec{e}}_z = 0$$

Tutorium zur Experimentalphysik I

Beschleunigung in Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z \\ \dot{\vec{r}} &= (\dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\vec{e}}_\rho) + (\dot{z} \vec{e}_z + z \dot{\vec{e}}_z) \\ &= \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \dot{z} \vec{e}_z \\ \ddot{\vec{r}} &= (\ddot{\rho} \vec{e}_\rho + \dot{\rho} \dot{\vec{e}}_\rho) + (\dot{\rho} \dot{\vec{e}}_\rho + \rho \ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \rho \dot{\varphi} \dot{\vec{e}}_\varphi) + (\ddot{z} \vec{e}_z + \dot{z} \dot{\vec{e}}_z) \\ &= (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \vec{e}_\rho + (\rho \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho} \dot{\varphi}) \vec{e}_\varphi + \ddot{z} \vec{e}_z \end{aligned}$$

Tutorium zur Experimentalphysik I

Sphärische Koordinaten

Einheitsvektoren

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \vartheta \cos \varphi \\ r \sin \vartheta \sin \varphi \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta \sin \varphi \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ableitung der Einheitsvektoren

$$\begin{aligned} \dot{\vec{e}}_r &= \dot{\vartheta} \vec{e}_\vartheta + \sin \vartheta \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi \\ \dot{\vec{e}}_\vartheta &= -\dot{\vartheta} \vec{e}_r + \cos \vartheta \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi \\ \dot{\vec{e}}_\varphi &= -\sin \vartheta \dot{\varphi} \vec{e}_r - \cos \vartheta \dot{\varphi} \vec{e}_\vartheta \end{aligned}$$

Tutorium zur Experimentalphysik I

Beschleunigung in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} \vec{r} &= r \vec{e}_r \\ \dot{\vec{r}} &= \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\vec{e}}_r = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\vartheta} \vec{e}_\vartheta + r \sin \vartheta \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi \\ \ddot{\vec{r}} &= \ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r} \dot{\vec{e}}_r + \dot{r} \dot{\vartheta} \vec{e}_\vartheta + r \ddot{\vartheta} \vec{e}_\vartheta + r \dot{\vartheta} \dot{\vec{e}}_\vartheta \\ &\quad + \dot{r} \sin \vartheta \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + r \cos \vartheta \dot{\vartheta} \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + r \sin \vartheta \dot{\varphi} \dot{\vec{e}}_\varphi + r \sin \vartheta \dot{\varphi} \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi \\ &= \ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r} \dot{\vartheta} \vec{e}_\vartheta + \dot{r} \sin \vartheta \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi \\ &\quad + \dot{r} \dot{\vartheta} \vec{e}_\vartheta + r \ddot{\vartheta} \vec{e}_\vartheta - r \dot{\vartheta} \dot{\vec{e}}_r + r \dot{\vartheta} \cos \vartheta \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi \\ &\quad + \dot{r} \sin \vartheta \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + r \cos \vartheta \dot{\vartheta} \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + r \sin \vartheta \dot{\varphi} \dot{\vec{e}}_\varphi \\ &\quad - r \sin \vartheta \dot{\varphi} \sin \vartheta \dot{\varphi} \vec{e}_r - r \sin \vartheta \dot{\varphi} \cos \vartheta \dot{\varphi} \vec{e}_\vartheta \\ &= (\ddot{r} - r \dot{\vartheta}^2 - r \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) \vec{e}_r \\ &\quad + (2\dot{r} \dot{\vartheta} + r \ddot{\vartheta} - r \sin \vartheta \dot{\varphi} \cos \vartheta \dot{\varphi}^2) \vec{e}_\vartheta \\ &\quad + (2\dot{r} \sin \vartheta \dot{\varphi} + 2r \cos \vartheta \dot{\vartheta} \dot{\varphi} + r \sin \vartheta \dot{\varphi}^2) \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

Tutorium zur Experimentalphysik I

Corioliskraft

Beispiel: Zugfahrt in Nord-Süd-Richtung

$$\begin{aligned} \dot{r} &= 0 && \text{Zug fährt auf der Erdoberfläche} \\ \dot{\varphi} &= \frac{2\pi}{86400 \text{ s}} \neq 0 && \text{Drehung der Erde} \\ \dot{\vartheta} &= \frac{2\pi \cdot v_{\text{Zug}}}{2\pi \cdot r_{\text{Erde}}} \neq 0 && \text{Kreisbewegung des Zuges} \end{aligned}$$

Kräfte (Beschleunigung) auf den Zug:

$$\begin{aligned} \frac{\vec{F}}{m} = \ddot{\vec{r}} &= (-r \dot{\vartheta}^2 - r \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) \vec{e}_r \\ &\quad - r \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\varphi}^2 \vec{e}_\vartheta + 2r \cos \vartheta \dot{\vartheta} \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi \\ &= -r \dot{\vartheta}^2 \vec{e}_r && \text{Zugbewegung} \\ &\quad - r \sin \vartheta \dot{\varphi}^2 (\sin \vartheta \vec{e}_r + \cos \vartheta \vec{e}_\vartheta) && \text{Erddrehung} \\ &\quad + 2r \cos \vartheta \dot{\vartheta} \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi && \text{Coriolisbeschl.} \end{aligned}$$

Tutorium zur Experimentalphysik I

(keine) Corioliskraft

Beispiel: Zugfahrt in West-Ost-Richtung

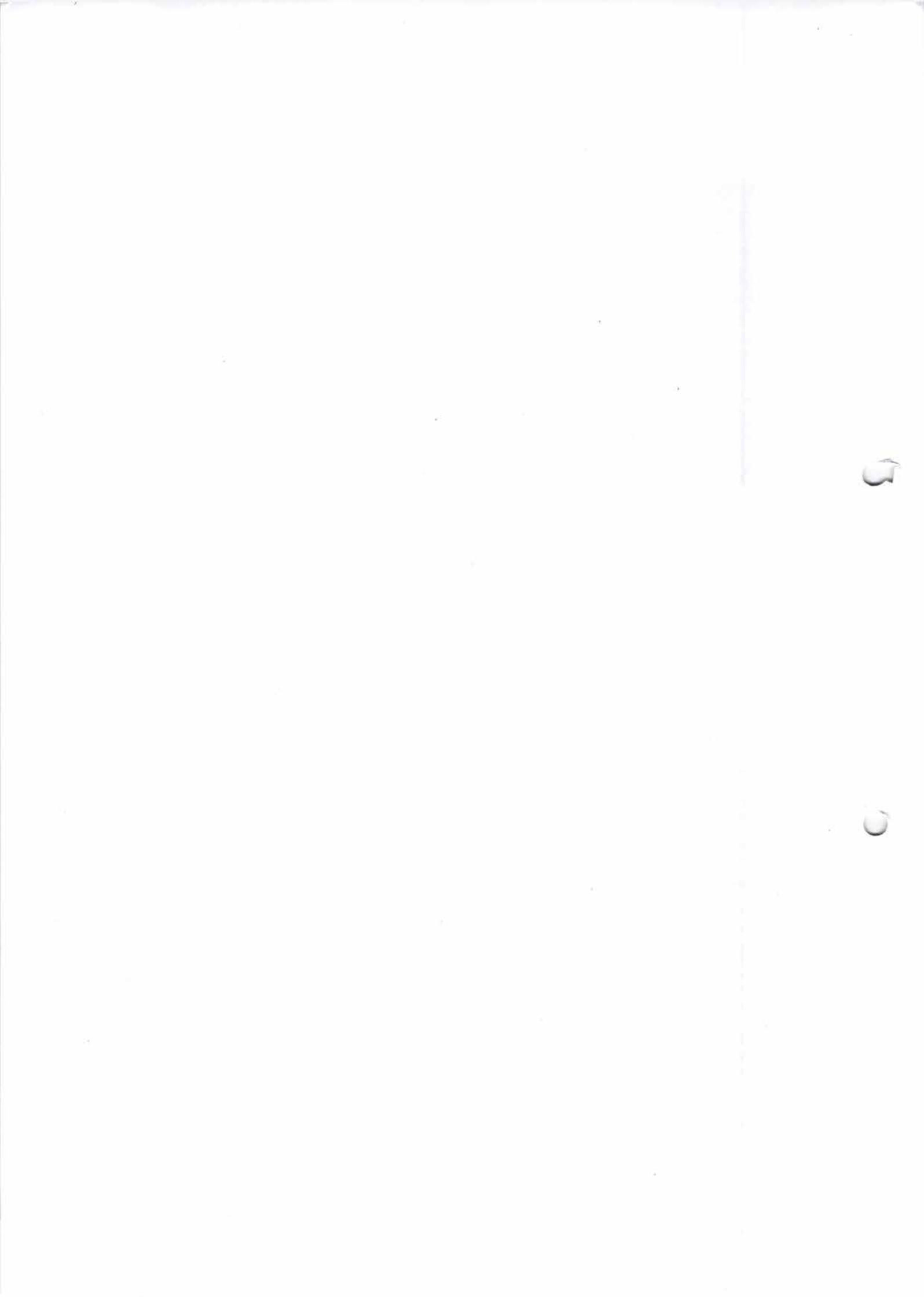
$$\begin{aligned} \dot{r} &= 0 && \text{Zug fährt auf der Erdoberfläche} \\ \dot{\varphi} &\neq 0 && \text{Erddrehung + Zugsbewegung} \\ \dot{\vartheta} &= 0 \end{aligned}$$

Kräfte (Beschleunigung) auf den Zug:

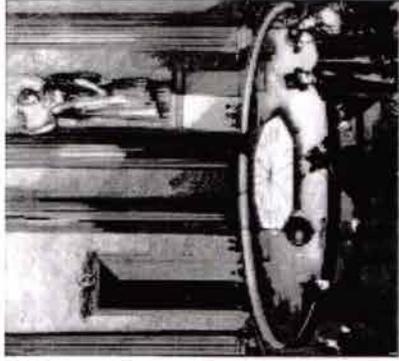
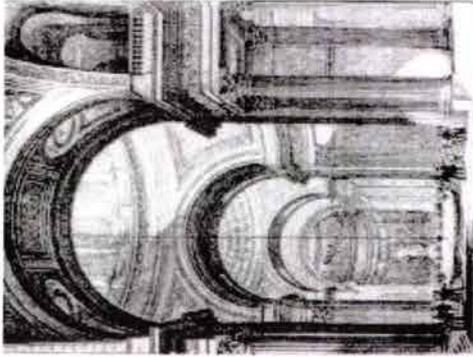
$$\begin{aligned} \frac{\vec{F}}{m} = \ddot{\vec{r}} &= -r \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 \vec{e}_r - r \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\varphi}^2 \vec{e}_\vartheta \\ &= -r \sin \vartheta \dot{\varphi}^2 (\sin \vartheta \vec{e}_r + \cos \vartheta \vec{e}_\vartheta) \end{aligned}$$

Hier wirkt nur die Zentripetalkraft senkrecht zur Drehachse.

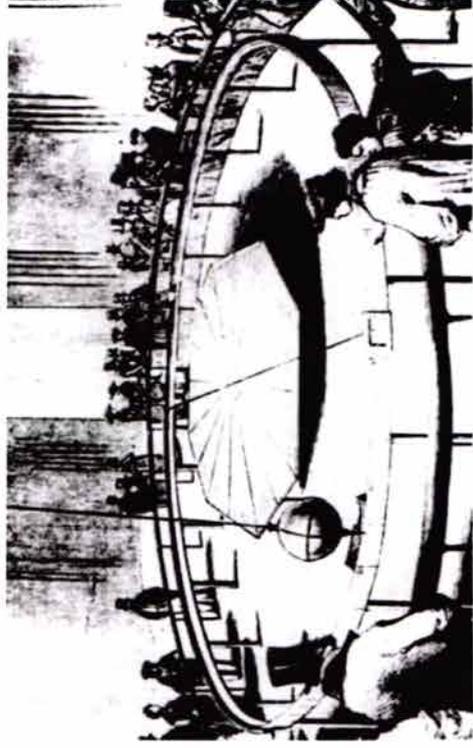
Tutorium zur Experimentalphysik I



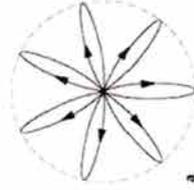
Das Foucault'sche Pendel (1851)



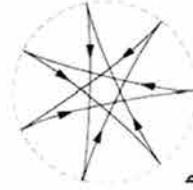
Pantheon, Paris 1851



Die Bahnen des „Foucault-Pendels“



Anregung des Pendel mit Tangential-Komponente der Geschwindigkeit



Anregung des Pendel ohne Tangential-Komponente der Geschwindigkeit



METEOROLOGIE

Wirbelstürme im Visier

Die Physik der Hurrikane, Taifune, Tornados und Windhosen

Dieter Etling

Katrina, Rita, Andrew: Diese Namen tropischer Wirbelstürme sind uns aus den Nachrichten vertraut. Doch woher beziehen diese Sturmsysteme die Energie für ihre Zerstörungskraft und was unterscheidet Hurrikane von Tornados? Obwohl die genauen Ursachen noch nicht vollständig verstanden sind, sollen hier die wichtigsten Charakteristika und die Physik dieser gewaltigen Wetterphänomene beleuchtet werden.

Im August 2005 hielten die Bürger mehrere südlicher US-Bundesstaaten den Atem an: Hurrikan Katrina hatte über den Gewässern des Golf von Mexiko Fahrt aufgenommen und begab sich nun auf Landkurs. Florida wurde durch einen überraschenden Kurswechsel Katrinas nur touchiert und kam vergleichsweise glimpflich davon. Dann traf es jedoch mit voller Wucht New Orleans. Tagelang gingen die Bilder der Zerstörung der Metropole in Louisiana um den Globus. Wirbelstürme solcher Energie sind zwar in Mitteleuropa bislang nicht aufgetreten, doch im März 2006 verursachte auch in der Hamburger Region ein Tornado zwei Todesopfer und hohe Sachschäden. Diese beiden Wetterereignisse sind exemplarisch für das Auftreten von Wirbelstürmen. Wie der Name bereits andeutet, handelt es sich um atmosphärische Wirbel – und zwar mit sehr hohen Windgeschwindigkeiten.

Hurrikane und Taifune

Um die Stärke der Wirbelstürme zu verdeutlichen, sei zunächst die Bedeutung des Begriffs „Sturm“ kurz erläutert: Windgeschwindigkeiten werden zwar in physikalischen Einheiten (m/s) gemessen, jedoch für praktische Zwecke meist der Beaufort-Skala (Bft) zugeordnet. Diese, nach dem britischen Admiral Francis Beaufort benannte Skala bewertet die Windstärke nach der Wirkung auf den Seegang bzw. auf Objekte an Land. Ein Sturm entspricht Windstärke Bft 9, d. h. die Windgeschwindigkeit liegt zwischen 75 und 88 km/h. Stürme verursachen an Land z. B. kleinere Schäden an Häusern, auf See hohe Wellenberge und dichte Schaumstreifen in Windrichtung. Die im Folgenden beschriebenen Wirbelstürme sind jedoch weit stärker als Bft 9.

Der eingangs erwähnte Hurrikan Katrina zählt zur Gruppe der tropischen Wirbelstürme [1, 2]. Diese



Abb. 1 Hurrikan Katrina am 28. August 2005 im Golf von Mexiko. Kurz danach waren über 1800 Todesopfer und 81 Milliarden Dollar Sachschaden zu beklagen. Um das Auge im Zentrum gruppieren sich die spiralförmigen Wolkenbänder.

treten in den Tropen und Subtropen auf und werden im Nordatlantik Hurrikan genannt. Das Wort stammt aus einer Sprache der mittelamerikanischen Ureinwohner, dort ist Huracan der Gott des Windes und der Zerstörung. Wirbelstürme im Nordpazifik heißen Taifun, hier stand das chinesische „ta-feng“ (großer Wind) Pate bei der Namensgebung.

Im Prinzip handelt es sich bei den tropischen Wirbelstürmen um großräumige Tiefdruckgebiete, ähnlich den in unseren Breiten geläufigen Tiefs. In Satellitenbildern (Abb. 1) zeigen sie sich als fast kreisförmige Wol-

KOMPAKT

- Die stärksten tropischen Wirbelstürme erreichen Windgeschwindigkeiten von über 250 km/h. Dazu kommen meterhohe Flutwellen und extreme Niederschläge.
- Die kleinräumigeren Tornados werden hauptsächlich im mittleren Westen der USA beobachtet, ihre Spitzenwindgeschwindigkeiten betragen bis zu 510 km/h.
- Beide Sturmarten werden von der latenten Wärme des Wasserdampfs angetrieben. Bei der Kondensation zu Wassertröpfchen wird sie in kinetische Energie, also Wind, umgewandelt. Der Dampf wird entweder über See (Hurrikan) oder Land (Tornado) aufgenommen.

Prof. Dr. Dieter Etling, Institut für Meteorologie und Klimatologie, Leibniz Universität Hannover, Herrenhäuserstr. 2, 30419 Hannover

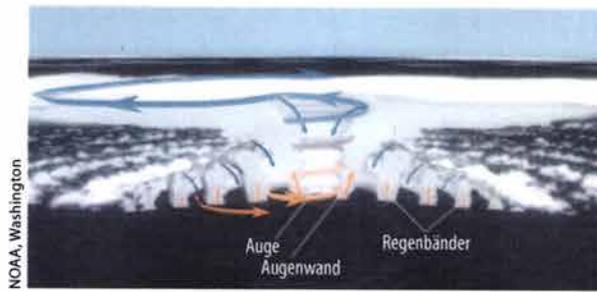


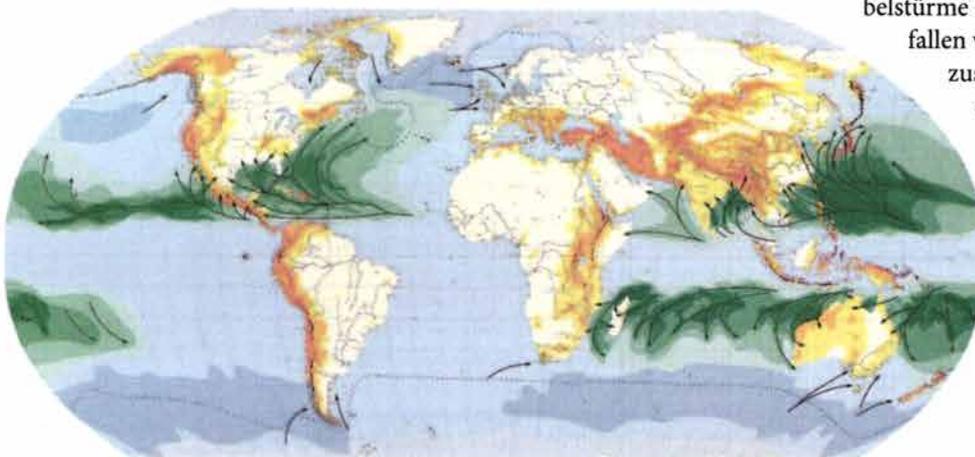
Abb. 2 Bei einem tropischen Wirbelsturm gruppieren sich die Wolkenstrukturen (helle Flächen) um das zentrale Sturmauge. Die Strömungsverhältnisse, insbesondere auf- und absteigende Luftmassen, sind durch orange und blaue Pfeile symbolisiert.

1) Über die aktuelle Wirbelsturmsituation informieren mehrere Webseiten, von denen eine Auswahl unter <http://multimedia.physik-journal.de> zu finden ist.

kenanordnungen mit gelegentlich erkennbaren Spiralarmlen sowie dem wolkenfreien Zentrum – dem Auge. Bei einer typischen Ausdehnung eines tropischen Wirbelsturms von einigen 100 km weist das zentrale Auge nur einen Durchmesser von etwa 50 km auf (vgl. Tab.).

Die innere Struktur tropischer Wirbelstürme ist allerdings erheblich komplexer als dies auf einem Satellitenbild den Anschein hat. Sie bestehen aus Bändern von hochreichenden Kumuluswolken, also Schauer- und Gewitterwolken, in denen zum Teil kräftige Aufwinde herrschen (Abb. 2). In den Gebieten zwischen den Wolkenbändern sinkt die Luft ab, ebenso im Auge des Wirbelsturms. Die bänderförmige Struktur der Wolkenanordnung ist auch in Radarbildern sichtbar, auf die später noch eingegangen wird. Erst in den letzten Jahren ist es gelungen, die komplexen Vorgänge, die zur Bildung des Auges und der Augenwand sowie der Spiralarmlen führen, näher aufzuklären [2, 3]. So vermutet man heute, dass z. B. die Spiralarmlen durch sog. Rossby-Wellen ausgelöst werden. Diese nach dem schwedischen Meteorologen C. G. Rossby benannten Wellen haben eine horizontale Schwingungsebene und bilden sich am Rand des Auges durch die Variation der Windgeschwindigkeit aus (siehe auch Abb. 7).

Die tropischen Tiefdruckgebiete werden erst dann als „Wirbelsturm“ bezeichnet, wenn ihre Windgeschwindigkeit 64 km/h (entspricht Bft 8) überschreitet. Ab diesem Schwellenwert erhalten sie Namen, um sie bei ihrer weiteren Entwicklung leichter identifizieren zu können. Ab einer Windstärke von 117 km/h, d. h.



Münchner Rückversicherung

Typische Daten für Hurrikane und Tornados		
	Hurrikan	Tornado
Durchmesser	200 – 800 km	50 – 1000 m
Lebensdauer	4 – 14 Tage	3 – 30 Minuten
Windgeschwindigkeit	100 – 300 km/h	100 – 500 km/h
Druckabfall	50 – 100 hPa/ 100 km	50 – 100 hPa/ 100 m

einem Orkan mit Bft 12, spricht man schließlich von Hurrikänen bzw. Taifunen. Für die in einem Hurrikan auftretenden Windgeschwindigkeiten gibt es über die Beaufort-Skala hinaus eigens die Saffir-Simpson-Skala. Diese umfasst die Kategorien 1 bis 5, wobei in einem „schwachen Hurrikan“ (Kategorie 1) Windgeschwindigkeiten von 117 bis 153 km/h auftreten. Katrina zählte dagegen zu den stärksten Exemplaren der Kategorie 5, mit Geschwindigkeiten von mehr als 250 km/h.

Neben diesen hohen Windgeschwindigkeiten verursachen Hurrikane und Taifune Flutwellen, die bei der Kategorie 5 über fünf Meter hoch sein können. Hinzu kommen erhebliche Regenmengen von durchschnittlich 400 Liter/m² in 24 Stunden (zum Vergleich: Die durchschnittliche Niederschlagsmenge in Deutschland beträgt 770 Liter/m² im Jahr). Tatsächlich hat die Kombination von hohen Windgeschwindigkeiten, hoher Flutwelle und großen Regenmengen die Katastrophe von New Orleans verursacht.

Zum Glück sind tropische Wirbelstürme relativ selten. So treten z. B. im Nordatlantik im Mittel zehn pro Jahr auf, darunter sechs Hurrikane. Nach dem Rekordjahr 2005 mit 28 tropischen Wirbelstürmen, darunter 15 Hurrikänen, entzündete sich eine wissenschaftliche Kontroverse an der Frage, ob dafür die zurzeit beobachtete Erderwärmung verantwortlich ist, sei diese nun natürlich oder anthropogen verursacht. Die Beobachtungen legen einerseits nahe, dass in den letzten 30 Jahren zwar die Zahl der tropischen Wirbelstürme nicht zugenommen hat, jedoch deren Stärke [4, 5]. Besonders Wirbelstürme der Kategorien 4 und 5 traten in diesem Zeitraum vermehrt auf. Kritiker dieser Analysen weisen jedoch auf Unsicherheiten in den Daten sowie der Auswertemethodik und bezweifeln eine Übertragbarkeit auf die zukünftige Klimaentwicklung [6, 7].

Weltweit werden pro Jahr etwa 80 tropische Wirbelstürme beobachtet. Ihre typischen Zugbahnen fallen weitgehend mit den warmen Ozeanen zusammen, da sich Wirbelstürme nur bei einer Wassertemperatur von mindestens 26° C ausbilden können [1, 2] (Abb. 3). Deshalb treten tropische Wirbelstürme auch nur in den warmen Monaten des Jahres auf. So erstreckt sich etwa die Hurrikansaison im Nordatlantik von April bis November.¹⁾

Abb. 3 In den grünen Regionen entwickeln sich tropische Wirbelstürme, schwarze Pfeile markieren ihre Zugbahnen.



Abb. 4 Als trichterförmige Wolke mit Bodenkontakt zeigt sich dieser Tornado der Stärke F4, der 1995 im texanischen Dimmit fotografiert wurde. Ein heftiger Druckabfall führt zur Kondensation des Wasserdampfes zu Tröpfchen und lässt den Schlauch sichtbar werden.

Tornado und Windhose

Die höchste bislang gemessene Windgeschwindigkeit von 510 km/h wurde nicht bei einem Hurrikan, sondern bei einem Tornado in der Nähe von Oklahoma City beobachtet [8]. Ein Tornado ist ein schlauchförmiger oder trichterförmiger Wirbel unterhalb einer großen Schauer- oder Gewitterwolke (Abb. 4) [9, 10]. Dieser sichtbare Teil des Tornados kommt durch den plötzlichen Druckabfall, der bis zu 100 hPa auf 100 m Distanz betragen kann, und die damit verbundene Kondensation von Wasserdampf im Bereich des Wirbelkerns zustande. Der Durchmesser beträgt lediglich einige hundert Meter und die Lebensdauer einige Minuten (Tabelle). Anders als Hurrikane sind Tornados also kleinräumige, kurzlebige atmosphärische Phänomene.

Der Name „Tornado“ stammt von dem spanischen Wort für drehen (tornare). In Deutschland ist daneben auch die Bezeichnung „Windhose“ oder, beim Auftreten über Gewässern, „Wasserhose“ geläufig. Namensgebend hierzulande war der einem Hosenbein ähnelnde, schlauchförmige Wirbel. In Südeuropa wird überwiegend die Bezeichnung Trombe (von Tromba, italienisch für Trichter) verwendet. Der eigentliche Tornado ist nur ein kleiner Teil der komplexen Zirkulation in einer großen Schauer- oder Gewitterwolke, deren horizontale und vertikale Ausmaße etwa 10 km betragen (Abb. 5).

Auch für Tornados existiert eine eigene Windstärken-Skala, die Fujita-Skala. Sie umfasst die Klassen F1 bis F5. Ein Tornado der Kategorie F3 tobt z. B. mit Windgeschwindigkeiten von 180 bis 250 km/h, ein Hurrikan muss dafür schon Kategorie 4 haben. Für die von Tornados angerichtete Zerstörung (siehe auch Abb. 12) spielt vor allem die hohe Windgeschwindigkeit, zum Teil in Verbindung mit dem raschen Druckabfall, die Hauptrolle. Der Niederschlag aus der Mutterwolke ist von geringerer Bedeutung.

Tornados treten hauptsächlich in den USA, besonders im mittleren Westen auf, wo sie etwa 1000-mal pro Jahr beobachtet werden. Dies liegt an der großen

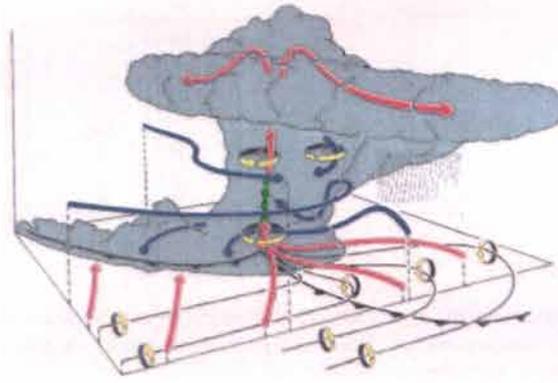


Abb. 5 In einer großen Schauerwolke treten warme (rote Pfeile) und kalte (blaue Pfeile) Luftströmungen auf. Gelbe Ringe symbolisieren den lokalen Rotationsinn des Windfeldes. Im Zentrum ist grün ein rotierender Aufwind zu erkennen: der entstehende Tornado.

Häufigkeit von Schauern und Gewittern, begünstigt durch das Aufeinandertreffen von feucht-warmer Luft aus dem Golf von Mexiko und kalt-trockener Luft aus Kanada. Die dadurch entstehende „Tornado-Allee“ ist im gleichnamigen Buch eindrucksvoll beschrieben [10]. In Deutschland werden pro Jahr etwa 20, meist schwache, Tornados beobachtet.²⁾

Die Jagd auf Wirbelstürme

Angesichts der beschriebenen Windstärken und der oft damit verbundenen Schäden ist es nicht verwunderlich, dass sich meteorologische Parameter wie Druck, Temperatur und Windgeschwindigkeit mit ortsfesten Instrumenten wie Barometer, Thermometer, Anemometer kaum in einem Wirbelsturm messen lassen. Wenn auch vereinzelt solche Messungen von Instrumenten vorliegen, die nicht von der Sturmgewalt zerstört wurden, so haben in den letzten Dekaden vermehrt Fernerkundungsmethoden den Kenntnisstand über Hurrikane und Tornados stark verbessert.

Für die Tornadoforschung erwiesen sich besonders mobile Doppler-Radargeräte (Abb. 6) [11] als sehr hilf-



²⁾ Die volle Dynamik von Tornados erschließt sich nur in Video-Aufnahmen. Links dazu sind ebenfalls im Multimedialekanal des Physik Journals zu finden.

Abb. 6 Tornados lassen sich mittels mobilem Doppler-Radar beobachten. Die Radarantenne ist auf der Rückseite des Fahrzeugs zu erkennen.

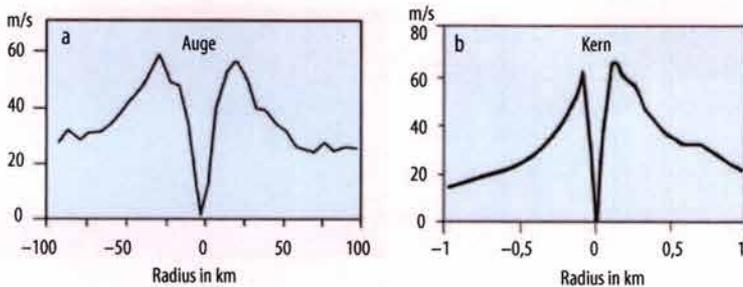


Abb. 7 Verlauf der Windgeschwindigkeit entlang eines Wirbeldurchmessers beim Hurrikan Andrew von 1992 (a) und beim

Tornado in Dimmit von 1995 (b). Man beachte die unterschiedlichen Längenskalen.

reich, da der Tornado-Schlauch nur wenige hundert Meter Durchmesser hat und schnell mit der Mutterwolke weiterzieht. Mit solchen, auch als „Doppler on Wheels (DOW)“ bezeichneten Messgeräten wurde auch die bereits erwähnte, bisher höchste Windgeschwindigkeit gemessen [8]. Als Beispiel einer Radarmessung zeigt Abb. 7b das radiale Windprofil des Tornados aus Abb. 4.

Trotz solcher moderner Messtechnik ist die Beobachtung der Tornadostruktur keineswegs einfach, da nach wie vor nicht genau bekannt ist, wann, wo und aus welcher Wolke ein Tornado entsteht. Zur wissenschaftlichen „Tornadajagd“ gehört also neben gründlichen Kenntnissen der physikalischen Mechanismen ihrer Entstehung auch etwas Glück.

Hier haben es die Hurrikanforscher etwas einfacher. Durch ihre große horizontale Ausdehnung von einigen hundert Kilometern sind tropische Wirbelstürme schon frühzeitig mit Wettersatelliten zu entdecken. Bevor diese Stürme in Landnähe kommen und somit ebenfalls Regenradar und Windradar zugänglich sind (Abb. 8), fliegen speziell ausgerüstete Flugzeuge des US-

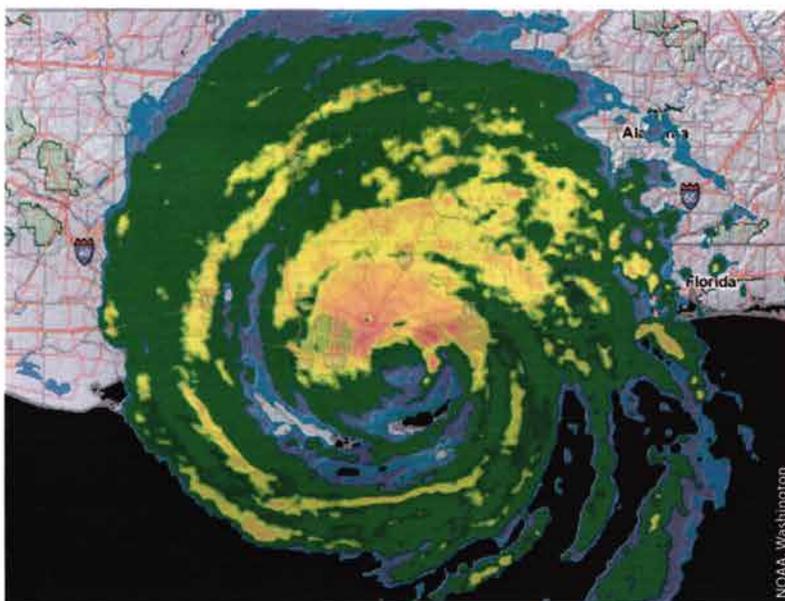
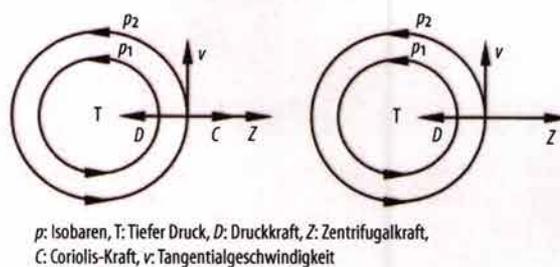


Abb. 8 Radarbild des Hurrikan Katrina (2005) mit Zentrum über New Orleans. Die Farbstufen stehen für die Stärke der Radarreflektivität, die ein Maß für die Regenintensität ist. Die Skala geht von rot

(stark) über gelb, blau, grün zu grau (schwach). Man erkennt starke Niederschläge im Bereich der Augenwand sowie der spiralförmigen Regenbänder.



p : Isobaren, T : Tiefer Druck, D : Druckkraft, Z : Zentrifugalkraft, C : Coriolis-Kraft, v : Tangentialgeschwindigkeit

Abb. 9 Die idealisierte kreisförmige Wirbelstruktur von Hurrikan (links) und Tornado (rechts) lässt sich durch ein Kräftegleichgewicht beschreiben.

Wetterdienstes NOAA durch die Hurrikane, um Wind, Temperatur und Druck zu messen [1]. Angesichts der großen Vertikalgeschwindigkeiten, besonders im Bereich des Augenwands, sind dies keine Spazierflüge, sondern harte Arbeit im Dienst der Wissenschaft. Die so gewonnenen Daten gehen sofort in Simulationsrechnungen ein (siehe Abschnitt „Wirbelverstärkung“), um die weitere Entwicklung des Hurrikans vorherzusagen [12, 13]. Insbesondere Ort und Zeitpunkt des ersten Landkontakts sind für den Katastrophenschutz von Interesse. Physikalische Messungen (Abb. 7) und numerische Simulationen zusammen mit der Interpretation der Resultate durch Meteorologen können hierbei Menschenleben retten.

Kräfte im Gleichgewicht

Auch wenn die Strömungen innerhalb von Hurrikanen oder Tornados eine sehr komplexe dreidimensionale Struktur aufweisen, so lässt sich die annähernd kreisförmige Zirkulation des Wirbelkerns vereinfacht durch das Gleichgewicht zwischen Druck-, Zentrifugal- und Coriolis-Kraft beschreiben (Abb. 9). Für den Tornado (oder einen ähnlichen kleinräumigen Wirbel) kann die Coriolis-Kraft vernachlässigt werden. Im reibungsfreien Fall würden sich Zentrifugalbeschleunigung Z und Druckkraft D das Gleichgewicht halten und der Wind würde kreisförmig um das Wirbelzentrum wehen. Die in der Realität immer vorhandene Reibungskraft lenkt den Wind zum Wirbelzentrum hin ab, sodass eine Strömung zum Zentrum hin auftritt (Strömungskonvergenz), die wiederum zu einer aufsteigenden Luftbewegung im Wirbelkern führt.

Bei einem Hurrikan oder einem anderen tropischen Wirbelsturm kommt die Corioliskraft hinzu, ansonsten sind die Kräfte- und Strömungsverhältnisse ähnlich wie in einem Tornado. In beiden Fällen treten die hohen Windgeschwindigkeiten in einem kleinen Kernbereich des Wirbels auf (Abb. 7).

Wie entstehen die hohen Geschwindigkeiten?

So unterschiedlich Hurrikan und Tornado auch sind, sie haben eines gemeinsam: Beide sind seltene Ereignisse von konzentrierten Wirbeln mit hoher Kern-Windgeschwindigkeit. Die Hauptfrage ist daher: Wie

kommt es zur Ausbildung dieser Wirbelkonzentration? Nachdem bereits verschiedene meteorologische Vorbedingungen genannt wurden, unter denen Hurrikane oder Tornados auftreten, ist die formale Beschreibung mittels physikalischer Gesetzmäßigkeiten der nächste Schritt. Atmosphärische Phänomene gehorchen den klassischen Gleichungen der Strömungsmechanik: Der Wind wird durch die Navier-Stokes-Gleichungen beschrieben, wobei allerdings die Atmosphäre als turbulente Strömung behandelt werden muss. Die Kontinuitätsgleichung verknüpft das Dichte- mit dem Geschwindigkeitsfeld. Luftdruck und Temperatur werden schließlich über den ersten Hauptsatz der Thermodynamik beschrieben. Dabei müssen zusätzlich Phasenübergänge zwischen Wasserdampf, Flüssigwasser und Eis berücksichtigt werden, da ja Hurrikane und Tornados als Energiequelle hochreichende Schauer- und Gewitterwolken benötigen.

Die Kombination der oben genannten Gesetzmäßigkeiten führt jedoch nicht einfach zu einer klaren Ursache für die Ausbildung von Wirbeln. Daher müssen Einzelursachen isoliert werden. Hier sei als Beispiel auf den Hauptmechanismus der Wirbelverstärkung eingegangen. Dazu verwendet man nicht die oben genannten Gleichungen, sondern eine abgeleitete Beziehung aus den Navier-Stokes-Gleichungen, die so genannte Wirbelgleichung oder auch Vorticity-Gleichung. Als Maß für die Wirbelstärke wird dabei die Rotation des Geschwindigkeitsfeldes $\nabla \times v$ gewählt.

Da sich Hurrikane und Tornados hauptsächlich um die vertikale Achse drehen, wird im Weiteren die mit ω bezeichnete Vertikalkomponente der Geschwindigkeitsrotation (Vorticity) betrachtet. Für ihre zeitliche Änderung $d\omega/dt$ gilt näherungsweise die Gleichung:

$$\frac{d\omega}{dt} = -(f + \omega) \nabla_h \cdot v_h \quad (1)$$

Hierbei ist $f = 2\Omega \sin\varphi$ der sog. Coriolis-Parameter, der sozusagen die Hintergrundrotation der Atmosphäre vom Inertialsystem aus betrachtet darstellt. Ω bezeichnet die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation und φ die geographische Breite. Der Term $\nabla_h \cdot v_h$ ist die horizontale Divergenz der Windgeschwindigkeit.

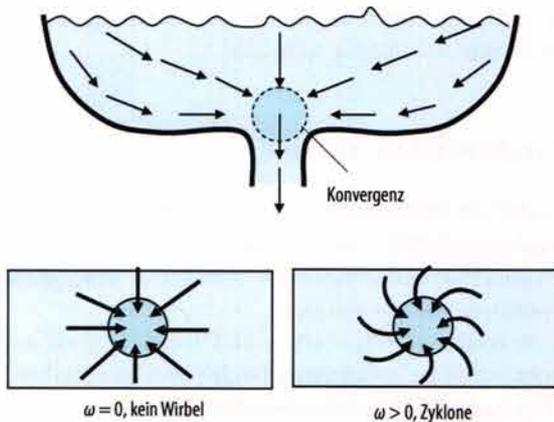


Abb. 10 Beim Abfluss aus einem Behälter bildet sich ein Wirbel nur dann aus, wenn bereits zu Beginn ein Drehsinn vorgegeben ist ($\omega \neq 0$). Oben: Querschnitt, unten: Aufsicht.

Wirbelverstärkung bei Tornado ...

Betrachten wir zunächst ein Wirbelphänomen, bei dem wie beim Tornado die Erdrotation und damit die Coriolis-Kraft keine Rolle spielen. Die Wirbelgleichung (1) besagt, dass die Vorticity anwächst ($d\omega/dt > 0$), wenn neben $\nabla_h \cdot v_h < 0$ bereits $\omega \neq 0$ gilt.

Nehmen wir als alltägliches Beispiel die Strömung am Ablauf eines Waschbeckens oder einer Badewanne. Wenn der Stöpsel bei gefülltem Becken gezogen wird, strömt das Wasser Richtung Abflussloch, sodass in diesem Bereich eine Strömungskonvergenz vorliegt (Abb. 10). Ob es zu dem häufig beobachteten Abflusswirbel kommt, hängt nun davon ab, ob beim Ziehen des Stöpsels auch ein anfänglicher Drehsinn (Vorticity ω) verursacht wurde. Ist dieser zufällig im Uhrzeigersinn (antizyklonal, $\omega < 0$), so wird sich nach kurzer Zeit ein starker Wirbel mit gleichem Drehsinn oberhalb des Ablaufs ausbilden (im Falle einer zyklonalen Anfangsstörung, $\omega > 0$, dreht der Wirbel andersherum). Unter idealen Versuchsbedingungen könnte der Stöpsel störungsfrei, d. h. ohne Anfangsdrehsinn, entfernt werden. Dann würde sich am Ablauf auch kein Wirbel bilden (Abb. 10). Dieser Mechanismus der Wirbelverstärkung erinnert an die Drehimpulserhaltung und Pirouetten beim Eiskunstlauf.

Unter der Annahme einer (zumindest anfänglich) konstanten Strömungskonvergenz, $\nabla_h \cdot v_h = -D$, ergibt sich als Lösung der Wirbelgleichung (1):

$$\omega(t) = \omega(0) e^{Dt} \quad (2)$$

Die Vorticity wächst somit schnell an und ist umso größer, je größer die Anfangsstörung $\omega(0)$ ist. Letzteres lässt sich leicht ausprobieren, indem man vor dem Ziehen des Stöpsels das Wasser im Becken bzw. der Wanne mit der Hand in Kreisbewegung versetzt.

Zur Demonstration der Wirbelbildung in einer Vorlesung oder im Schulunterricht verwendet man am besten einen Plexiglaszylinder von 20 bis 30 cm Durchmesser. In das Zentrum des Zylinderbodens wird ein Abflussloch von 10 bis 20 mm Durchmesser gebohrt. Die anfängliche Wasserhöhe sollte zwischen 10 und 20 cm betragen. Wenn man das eingefüllte Wasser



Abb. 11 In einem zylindrischen Wassergefäß bildet sich über dem Ablauf im Zentrum ein schlauchförmiger Hohlwirbel aus.



Abb. 12 Im thüringischen Quirla richtete ein Tornado am 2. Oktober 2006 erhebliche Schäden an.

zunächst eine Weile ruhen lässt, entsteht erst nach längerer Zeit, wenn überhaupt, ein sichtbarer Wirbel. Ein leichtes Umrühren der Wassersäule vor dem Ziehen des Stöpsels führt jedoch innerhalb weniger Sekunden zu einem schlauchförmigen Hohlwirbel oberhalb des Abflussloches (Abb. 11).

Der eben diskutierte Mechanismus der Wirbelverstärkung ist auch ein Bestandteil der komplexen Vorgänge bei der Tornado-Entstehung. Die horizontale Windkonvergenz wird unterhalb der Mutterwolke durch die starken Aufwinde, die in einer Kumuluswolke herrschen, erzeugt. Woher die anfängliche Rotation ω jedoch kommt, ist nach wie vor unklar und Gegenstand zahlreicher Forschungsaktivitäten [9, 14]. Eine Möglichkeit ist die, dass die Mutterwolke, aus der schließlich ein Tornado entsteht, sich ihrerseits um ihre vertikale Achse dreht, wobei diese Drehung durch die Wechselwirkung von Windscherungen im Bereich der Umgebungsluft eingeleitet wird. Diese Art von rotierenden Gewitterwolken, welche wegen ihres Durchmessers von 30 bis 50 km auch als Superzellen bezeichnet werden, treten hauptsächlich in den USA auf.

Alles in allem entspringt ein Tornado aus einem recht komplexen Wechselspiel zwischen den Auf- und Abwinden in der Wolke und den Windverhältnissen der Wolkenumgebung (siehe Abb. 5), das bis heute noch nicht restlos geklärt ist. Jedenfalls müssen ganz spezielle Verhältnisse bei der Tornado-Entstehung herrschen, sonst wären diese nicht so selten.

... und Hurrikan

Betrachten wir jetzt noch den Fall, in dem die Erdrotation bei der Wirbelbildung eine Rolle spielt. Das sind großräumige (Ausdehnung von einigen hundert Kilometern) und langlebige (Dauer von Stunden und Tagen) Wettervorgänge wie z. B. Hurrikane und Taifune.

Nun kann ein Wirbel wegen der immer vorhandenen Erdrotation f sogar aus einer wirbelfreien Strömung ($\omega(0) = 0$) entstehen. In diesem Fall ist anfänglich $d\omega/dt \approx fD$, sodass sich bei einer Windkonvergenz ein Wirbel mit dem gleichen Drehsinn wie f , also im Gegenuhrzeigersinn, bildet. Tatsächlich beobachtet

man bei allen tropischen Wirbelstürmen eine entsprechende Drehung des Windes um das zentrale Auge.

Der oben beschriebene Effekt der Erdrotation auf die Wirbelbildung lässt sich sehr einfach mit der vorher beschriebenen „Versuchsbadewanne“ durchführen, indem diese auf einem Drehtisch montiert wird. Nach dem Ziehen des Stöpsels bildet sich nach kurzer Zeit ein Wirbel mit der gleichen Drehrichtung des Drehtisches. Übrigens wurde dieser Modellversuch erst kürzlich anhand von Experimenten und theoretischen Überlegungen ausführlich diskutiert [15].

Die Entstehung eines tropischen Wirbelsturms ist natürlich sehr viel komplexer als in einem solchen einfachen Laborversuch. Zwar hat man festgestellt, dass der Einfluss der Erdrotation eine der notwendigen Bedingungen für dessen Ausbildung ist (am Äquator wäre $f = 0$), jedoch kann eine zufällige Ansammlung hochreichender Kumuluswolken, z. B. in sog. Wolkenhaufen, wie sie häufig in den Tropen auftreten, allein keinen Wirbelsturm erzeugen. Die gemäß Gl. (1) notwendige horizontale Windkonvergenz tritt zwar unter jeder dieser Wolken auf, wie auch bei Wolken, aus denen Tornados entstehen, jedoch sind die Konvergenzgebiete zu kleinräumig, als dass die Coriolis-Kraft einen Einfluss hätte. Beobachtungen und numerische Simulationen haben ergeben, dass bereits eine großräumigere Störung in Form eines zyklonalen Wirbels vorhanden sein muss, damit sich aus tropischen Wolkenhaufen ein Wirbelsturm bildet. Wodurch diese Anfangszyklone ausgelöst werden, ist noch weitgehend unklar.

Als eine Möglichkeit kommen Störungen in Betracht, die durch eine großräumige tropische Wellenerscheinung, den „Easterly Waves“ verursacht werden. Diese Wellen mit horizontaler Schwingungsebene und etwa 1000 km Wellenlänge entstehen durch Instabilitäten im sog. Subtropen-Strahlstrom, einem in Ost-West-Richtung verlaufenden Starkwindband im Bereich der Passatwinde. In den Trögen dieser Wellen, also den Ausbuchtungen der Isobaren nach Norden, erfährt die Luftströmung eine Krümmung im Gegenurzeigersinn, was gleichbedeutend mit einer zyklonalen Vorticity ist. Wenngleich auch einige Hurrikane ihren Ursprung in diesen Wellenerscheinungen haben, so ist die eigentliche Genese tropischer Wirbelstürme noch nicht vollständig aufgeklärt.³⁾

Wasserdampf als Treibstoff

Die hohen Windgeschwindigkeiten und die damit verbundenen großen Schäden durch Wirbelstürme werfen die Frage auf, woher diese Wirbel ihre beachtliche kinetische Energie nehmen.

So verschieden Hurrikane und Tornados auch sind, eines haben sie gemeinsam: Beide benötigen zu ihrer Bildung und Existenz hochreichende Kumuluswolken. Während ein Tornado jedoch aus einer einzelnen Wolkenzelle entsteht, besteht ein Hurrikan aus einer Vielzahl solcher Wolken. Diese Wolken sind sozusagen der

3) In einem neueren Übersichtsartikel [2] über tropische Wirbelstürme findet sich hierzu der Satz: „Clearly, we have a long way to go in understanding genesis (of tropical cyclones)“.

Antrieb der Wirbelsysteme. Grob gesprochen geht es dabei um die Umsetzung von innerer und potenzieller Energie in kinetische Energie, die sich als Wind äußert.

Dies sei am Beispiel der Vertikalbewegung in einer Wolke vereinfacht dargestellt. Aus den Mechanikvorlesungen zur Experimentalphysik ist der Begriff des Archimedischen Auftriebs bekannt, der sich für die Vertikalbeschleunigung dw/dt eines Luftpartikels vereinfacht schreiben lässt als:

$$\frac{dw}{dt} \approx -g \frac{\rho_p - \rho_u}{\rho_p} \approx g \frac{T_p - T_u}{T_p} \quad (3)$$

Dabei sind w die Vertikalgeschwindigkeit (Aufwind, Abwind), g die Erdbeschleunigung, ρ die Luftdichte und T die Lufttemperatur in Kelvin. Der Index p bezeichnet das Luftpaket, der Index u die Umgebungseigenschaften. Gleichung (3) drückt die bekannte Erfahrungstatsache aus, dass leichte (wärmere) Luft aufsteigt und schwerere (kältere) Luft absinkt. Nun ist die Umgebungstemperatur in der Atmosphäre immer eine Funktion der Höhe $T_u(z)$, aber auch das Luftpaket ändert seine Temperatur T_p während des Aufstiegs (z. B. durch adiabatische Abkühlung). Wie stark ein Luftpaket vertikal beschleunigt wird und wie lange diese Beschleunigung anhält, hängt von der Temperaturdifferenz $T_p - T_u$ in Gl. (3) ab. Hier kommt nun die Wolkenbildung ins Spiel. Eine Wolke wird quasi durch die Kondensation von Wasserdampf zu Flüssigwasser (Wolkentropfen) definiert. Aus der Thermodynamik wissen wir, dass beim Phasenübergang von Wasserdampf zu Wasser die latente Wärme freigesetzt wird. Dies führt zu einer Temperaturerhöhung dT , für die angenähert gilt:

$$c_p dT \approx L dq \quad (4)$$

Dabei ist c_p die spezifische Wärme bei konstantem Druck ($c_p = 1007 \text{ J/kg}$), L die latente Wärme für die Wasserdampfkondensation ($L = 2,5 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$) und dq die pro Masseneinheit umgewandelte Wasserdampfmenge.

In Bezug auf den Archimedischen Auftrieb (3) eines feuchten Luftpartikels, das beim Aufstieg kälter wird und in dem der vorhandene Wasserdampf dabei kondensieren kann, erkennt man aus Gl. (4), dass das Partikel bei der Kondensation erwärmt und somit nochmals beschleunigt wird. Daher können Kumuluswolken unter gegebenen Umständen bis an die Obergrenze der Troposphäre (10 bis 15 km Höhe) vorstoßen und dabei sehr hohe Vertikalgeschwindigkeiten erzeugen (zwischen 10 und 40 m/s). Flugzeugpiloten gehen deshalb Kumulonimbus-Wolken möglichst aus dem Weg.

Woher stammt nun der Wasserdampf für die Wolken? Aus der Verdunstung von Wasser über Land bei den Tornados bzw. an der Meeresoberfläche bei den tropischen Wirbelstürmen. Nach der Beziehung von Clausius-Clapeyron kann ein Luftvolumen proportional zur Temperatur eine Wasserdampfmenge aufnehmen. Daher eignen sich besonders tropische Meere für die Bildung von Kumulonimbus-Wolken. Tatsächlich fand man als eine der Hauptvoraussetzungen für die Bildung tropischer Wirbelstürme, dass die Tempera-

tur der Meeresoberfläche mindestens 26° C betragen muss [1, 2]. Der Treibstoff für Hurrikane und Tornados ist somit letztlich Wasserdampf, wobei die beim Kondensationsvorgang frei werdende latente Wärme in kinetische Energie umgesetzt wird. Die „Tankstelle“ befindet sich an der Erdoberfläche. Werden dort die Quellen schwächer oder versiegen, z. B. weil ein Hurrikan über kälteres Wasser oder über Land zieht, fehlt dem Motor die notwendige Kraft, um die Stürme aufrecht zu erhalten. Die Energieumwandlungen in Wirbelstürmen sind natürlich wesentlich komplexer als durch die einfachen Beziehungen (3) und (4) beschrieben. Ausführliche Diskussionen zu dieser Problematik findet man für Tornados in [9, 10, 14] und für Hurrikane bzw. Taifune in [1–3].

Die diesjährige Wetter-Statistik für die Saison 2006 weist für den Nordatlantik momentan neun tropische Wirbelstürme, darunter fünf Hurrikane auf (In Deutschland haben Tornados Zerstörungen hinterlassen, Abb. 12). Das ist weit entfernt von den Rekordzahlen des Vorjahres (28 und 15). War 2005 also eine Ausnahme? Oder sind wir Zeugen erster Anzeichen einer zunehmenden Wirbelsturmaktivität verursacht durch eine Klimaänderung? Die wissenschaftliche Debatte dazu wird auch in Zukunft anhalten.

Literatur

- [1] K. Emanuel, *Divine Wind, The History and Science of Hurricanes*, Oxford University Press, Oxford (2005)
- [2] K. Emanuel, *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.* **31**, 75 (2003)
- [3] Y. Wang, C. C. Wu, *Meteorol. Atmos. Phys.* **87**, 257 (2004)
- [4] K. Emanuel, *Nature*, **436**, 686 (2005)
- [5] P. J. Webster et al., *Science* **309**, 1844 (2005)
- [6] C. W. Landsea, *Nature*, **438**, E 11 (2005)
- [7] R. A. Anthes et al., *Bull. Amer. Meteor. Soc.* **87**, 623 (2006)
- [8] R. Monastirsky, *Science News* **155**, 308 (1999)
- [9] C. Church, D. Burgess, C. Doswell und R. Davies-Jones (Hrsg.), *The Tornado: Its Structure, Dynamics, Prediction and Hazards*, Geophysical Monograph 79, American Geophysical Union, Washington (1993)
- [10] H. Bluestein, *Tornado Alley*, Oxford Univ. Press, Oxford (1999)
- [11] J. Wurman, S. Gill, *Mon. Wea. Rev.* **128**, 2135 (2000)
- [12] H. Kurihara, R. E. Tuleya und M. A. Bender, *Mon. Wea. Rev.* **126**, 1306 (1998)
- [13] B. W. Shen et al., *Geophys. Res. Lett.* **33**, L 13813 (2006)
- [14] R. Davies-Jones, R. J. Trapp und H. B. Bluestein, *Tornados and Tornadoic Storms*, in: C. A. Doswell (Hrsg.), *Severe Convective Storms*. Meteorol. Monogr. 25, Amer. Meteor. Soc., Boston (2001), S. 167
- [15] A. Andersen, T. Bohr, B. Stenum, J. Rassmussen und B. Laustrup, *J. Fluid Mech.* **556**, 121 (2006)

DER AUTOR

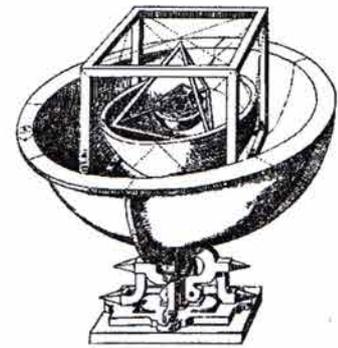
Dieter Etling ist seit 1979 Professor für Theoretische Meteorologie an der Universität Hannover. Er studierte Physik und Meteorologie in Frankfurt, Marburg und Darmstadt. Dort, an der TH Darmstadt, schloss er sein Studium 1971 ab und promovierte fünf Jahre später. Ab 1976 folgten zwei Jahre als Postdoc am IBM Research Center im kalifornischen San Jose. Seine Forschungsgebiete reichen von der atmosphärischen Grenzschicht über thermische Konvektionen bis zur Wirbelndynamik. Diesen Themen geht er mit numerischen Simulationen und Laborexperimenten auf den Grund.



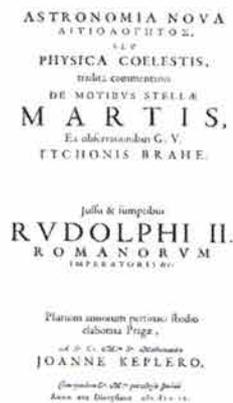


Johannes Kepler

(1571 – 1630)



1596:
Mysterium Cosmographicum



Keplersche Gesetze (1605-1610):

1. Die Bahnen der Planeten sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht. (1605)
2. In gleichen Zeiten werden gleiche Flächen überstrichen. (1605)
3. Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen. (1615)

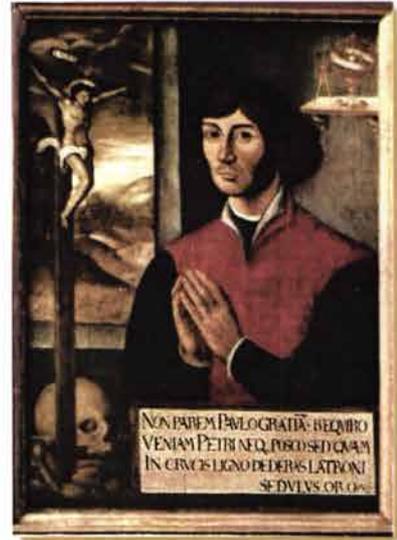
Diese *empirisch ermittelten Gesetze* beschreiben zwar den Planetenverlauf gut, lieferten aber keine physikalische Erklärung.

Warum sind die Bahnen gekrümmt?

Die physikalische Erklärung liefert erst die Newtonsche Mechanik (1643 – 1727).

Nikolaus Kopernikus

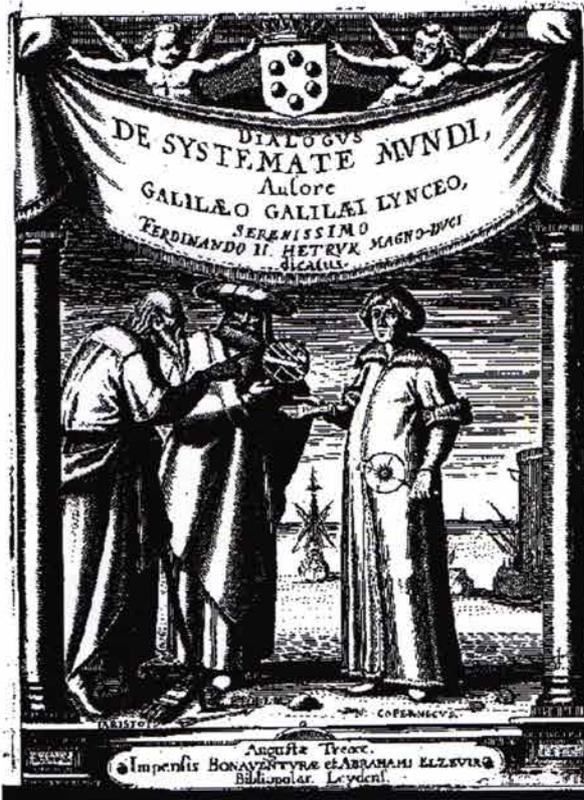
(1473 – 1543)



1543

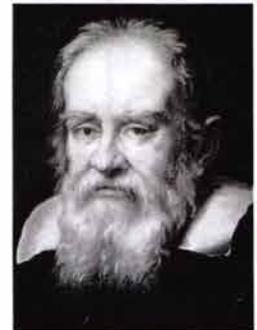
“De revolutionibus orbium coelestium”

(“Über die Bewegungen im Himmelsraum”)



Galileo Galilei

(1564 – 1642)



DIALOGO

DI
GALILEO GALILEI LYNCEO
MATEMATICO SOPRAORDINARIO
DELLO STUDIO DI PISA.

E Filosofo, e Matematico primario del
SERENISSIMO

GR. DVCA DI TOSCANA.

Daue ne i congressi di quattro giornate si discorre
sopra due

MASSIMI SISTEMI DEL MONDO
TOLEMAICO, E COPERNICANO;

Propugnando l'interuenire acconter le ragioni Filosofiche, e Naturali
Loro per l'una, e quante per l'altra parte.

CON PRI



VILEGI

IN FIORENTIA, Per Gio: Benini Landini MDCXXIII.

CON LICENZA DE' SUPERIORI.