Quantenmechanik II

H. Aldahhak, S. M. Wippermann, W. G. Schmidt, aldahhak@mail.upb.de

Übungsblatt 11 – Exercise 11

1. **Die Greensche Funktion** (2 Punkte)
   The Green's function
   Mit der Methode der Greenschen Funktion lassen sich partielle Differentialgleichungen der Form With the method of the Green's function one can solve differential equations of the kind

$$\left[\hat{L}(\vec{r}) - z\right] \psi(\vec{r}) = f(\vec{r}) \tag{1}$$

   lösen. Die Lösung hat die Form The solution is given by

$$\psi(\vec{r}) = \psi_0(\vec{r}) + \int G(\vec{r} - \vec{r}')f(\vec{r}')d^3r', \tag{2}$$

   falls $\psi_0(\vec{r})$ die Lösung des homogenen Problems if $\psi_0(\vec{r})$ is the solution of the homogenous equation

$$\left[\hat{L}(\vec{r}) - z\right] \psi_0(\vec{r}) = 0 \tag{3}$$

   ist und $G(\vec{r} - \vec{r}')$ die Greensche Funktion des Operators $\hat{L}$ darstellt, d.h. die Lösung der Gleichung and $G(\vec{r} - \vec{r}')$ is the Green's function of the operator $\hat{L}$, i.e. the solution of the equation

$$\left[\hat{L}(\vec{r}) - z)\right] G(\vec{r} - \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \tag{4}$$

   ist. Zeigen Sie, dass $\psi(\vec{r})$ Gl. (2) durch die Bedingungen Gln. (3) und (4) die Lösung von Gl. (1) ist. Show that $\psi(\vec{r})$ eq. (2) is the solution of eq. (1), if the conditions eqn. (3) and (4) hold.

2. **Freies Teilchen II** (2+3 Punkte)
   Zu Berechnen ist die Greensche Funktion des Hamilton-Operators eines freien Teilchens. Betrachten Sie dazu die stationäre Schrödingergleichung (mit $\hbar = m = 1$): The Green's function of the Hamilton operator of a free particle is to calculate. Therefore consider the stationary Schrödinger equation (with $\hbar = m = 1$):

$$(\nabla^2 + E)\psi(\vec{r}) = 0. \tag{5}$$

a) Setzen Sie Fouriertransformation ein, um die k-Raum Darstellung der Greenschen Funktion $G(\vec{k}, E)$ zu erhalten. Sie bekommen nach der Fouriertransformation von Gl. (5) eine algebraische Gleichung für $G(\vec{k}, E)$. Use Fourier-transformation to obtain an expression for the k-space Green's function $G(\vec{k}, E)$. After the Fourier-transformation of eq. (5) one obtains an algebraic equation for $G(\vec{k}, E)$.

b) Über die Rücktransformation kann $G(\vec{r} - \vec{r}', E)$ bestimmt werden. Bei der k-Raum Integration ist es hilfreich Kugelkoordinaten und den Kosinussatz zu verwenden. Beachten Sie die nachstehenden Hinweise. Applying the back transformation $G(\vec{r} - \vec{r}', E)$ can be determined. It is helpful to use spherical coordinates and the cosine rule to perform the k-space integration. Consider the following hints.

Hinweise Hints:

$$f(\vec{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \exp(i\vec{k}\vec{r}) f(\vec{k}) \text{ und and } \delta(\vec{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \exp(i\vec{k}\vec{r}) \tag{6}$$

$$\int dk \frac{k \exp(ikr)}{k^2 - E} = \begin{cases} i\pi \exp(i\sqrt{E}r), & \text{für for } \Im E > 0 \\ i\pi \exp(\pm i\sqrt{E}r), & \text{für for } \sqrt{E}, E \geq 0 \\ i\pi \exp(-\sqrt{|E|}r), & \text{für for } E < 0, \sqrt{|E|} \geq 0 \end{cases} \tag{7}$$

$$\int_0^\infty dy\, g(y) = \frac{1}{2} \int dy\, g(y) \text{ falls if } g(y) = g(-y) \tag{8}$$

3. **Poisson-Gleichung** (2 Punkte)
Poisson equation
Lösen Sie die Poisson-Gleichung Solve the Poisson equation

$$\Delta\phi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}. \tag{9}$$

Sie können alle Ergebnisse aus diesem Übungsblatt verwenden. You can use every result of the present exercise sheet.

4. **Greensche Funktion vs Propagator** (4 Punkte)
Green's function vs propagator
Die zeitabhängige Greensche Funktion des Hamilton-Operators H_F eines freien Teilchens lässt sich schreiben als [vgl. Gl. (6.54) im Skript]: The time-dependent Green's function of the Hamilton-operator H_F of a free particle can be written as [cf. eq. (6.54) in the lecture notes]:

$$G^R(\vec{r}, \vec{r}', t-t') = -i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \phi_k^*(\vec{r}') \phi_k(\vec{r}) \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\tilde{E}(\vec{k})(t-t')\right] \text{ mit with } t-t' > 0. \tag{10}$$

$\phi_k(\vec{r})$ und $\tilde{E}(\vec{k}) = E(\vec{k}) - i\delta$ bilden in Gl. (10) das (kontinuierliche) Spektrum der Eigenfunktionen und Eigenwerte von H_F. Berechnen Sie $G^R(\vec{r}, \vec{r}', t-t')$ (für

$\delta \to 0$) explizit und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Propagator eines 3-d freien Teilchens [Gl. (5.89) im Skript]. Bei der k-Raum-Integration ist es sinnvoll jede kartesiche Richtung nacheinander zu bearbeiten. Sie können die Integrale aus Übungsblatt 10 verwenden. $\phi_k(\vec{r})$ und $\tilde{E}(\vec{k}) = E(\vec{k}) - i\delta$ in eq. (10) are the (continuous) spectrum of the eigenfunctions and eigenvalues of H_F. Calculate $G^R(\vec{r}, \vec{r}', t - t')$ (for $\delta \to 0$) explicitly and compare the result with the propagator of a 3-d free particle [eq. (5.89) in the lecture notes]. Performing the k-space integration it is usefull to integrate the cartesian components in sequence. You can use the integrals of exercise sheet 10.