Quantenmechanik II **Advanced Topics in Quantum Mechanics**

H. Aldahhak, S. M. Wippermann and W. G. Schmidt (aldahhak@mail.upb.de)

Abgabe in Fach 4 auf N3, bis: 10:00 Uhr, den 08.01.2018

Übungsblatt 10 Exercise 10

1. **Propagator eines freien Teilchens** Propagator of a free particle

   a) Gehen Sie vom Evolutions-Operator $\hat{U}(t_E, t_A)$ aus und zeigen Sie dass der Propagator $K(x_E, t_E; x_A, t_A)$ eines freien Teilchens, welches durch den Hamilton-Operator $\hat{H} = \hat{p}^2/(2m)$ gegeben wird, durch: Start from the time-evolution operator $\hat{U}(t_E, t_A)$ and show that the propagator of a free particle described by the Hamiltonian $\hat{H} = \hat{p}^2/(2m)$ is given by

   $$K(x_E, t_E; x_A, t_A) = \sqrt{\frac{m}{i2\pi\hbar(t_E - t_A)}} exp[\frac{im}{2\hbar(t_E - t_A)}(x_E - x_A)^2]$$

   beschrieben ist. Hinweis: Verwenden Sie die Darstellung des Identitätsoperators durch die Eigenzustände des Impulsoperators $\mathbb{I} = \int dp \left|p\right\rangle \left\langle p\right|$ und die Relation (5.50) im Manuskript. Hint: Use the identity operator expressed with the aid of the eigenstates of the momentum operator $\mathbb{I} = \int dp \left|p\right\rangle \left\langle p\right|$ and the relation 5.50 in the lecture notes.

   b) Berechnen Sie $\Psi(x,t)$, falls $\Psi(x,0) = [\sigma\sqrt(2\pi)]^{-1/2} \exp[-x^2/(4\sigma^2)]$. Überprüfen Sie, dass gilt: $\lim_{t\to 0} \Psi(x,t) = \Psi(x,0)$. Calculate $\Psi(x,t)$, if $\Psi(x,0) = [\sigma\sqrt(2\pi)]^{-1/2} \exp[-x^2/(4\sigma^2)]$. Check that it holds: $\lim_{t\to 0} \Psi(x,t) = \Psi(x,0)$.

   Hinweise für (a) und (b) Hints for (a) and (b):

   $\int dx \exp[-i(ax^2 + bx)] = \sqrt{\frac{\pi}{ia}} \exp[ib^2/(4a)]$

   $\int dx \exp[-bx^2 + \alpha x] = \sqrt{\frac{\pi}{b}} \exp[\alpha^2/(4b)]$

2. **Harmonischer Oszillator** **Harmonic oscillator**

   a) Berechnen Sie den Propagator K für einen harmonischen Oszillator (Hamilton-operator). Calculate the propagator K for a harmonic oscillator (Hamilton operator). Gehen Sie vom Ansatz Start with the ansatz

   $$K(x_E, t_E; x_A, t_A) = \int DxDp \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_A}^{t_E} dt[\dot{x}p - H(x,p)]\right\} \tag{1}$$

   aus und führen Sie die Integration über die Impulse $\int Dp..$ aus and perform the momentum integration $\int Dp...$ Identifizieren Sie die Lagrangefunktion $L(x, \dot{x})$. Identify the Lagrangian $L(x, \dot{x})$.

b) Die Koordinate x wird nun zerlegt in The coordinate x is now decomposed

$$x(t) = x_c(t) + X(t), \tag{2}$$

wobei $x_c(t)$ die klassische Bahnkurve eines Teilchens bezeichnet und $X(t)$ quantenmechanische Fluktuationen darstellt. where $x_c(t)$ is the classical trajectory and $X(t)$ are quantum mechanical fluctuations. Berechnen Sie zunächst die klassische Bahnkurve des Teilchens. Dazu müssen Sie eine Gleichung verwenden, die die Wirkung Calculate the classical trajectory of the particle. Therefore you have to use an equation, which minimizes the action

$$S[x] = \int_{t_A}^{t_E} dt L(x, \dot{x}) \tag{3}$$

minimiert. Wegen der Definition von $x_c(t)$ und $X(t)$ gelten zusätzlich die Randbedingungen: Due to the definition of $x_c(t)$ and $X(t)$ additionally the boundary conditions hold:

$$x_c(t_A) = x_A \text{ und } x_c(t_E) = x_E \tag{4}$$

$$X(t_A) = 0 \text{ und } X(t_E) = 0 \tag{5}$$

Einige Hinweise: Führen Sie eine neue Zeitkoordinate ein $\tilde{t} := t - t_A$ und werten Sie die Randbedingungen aus. Verwenden Sie einen geeigneten Ansatz. Sie können das Additionstheorem verwenden: $\sin(x - y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$.

Some hints: Introduce a new time coordinate $\tilde{t} := t - t_A$ and evaluate the boundary conditions. Use a suitable ansatz. You can use the addition theorem: $\sin(x - y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$.

c) Zeigen Sie nun, dass $S[x]$ geschrieben werden kann als: Now show that $S[x]$ can be written as:

$$S[x] = \int_{t_A}^{t_E} dt \frac{m}{2}(\dot{x}_c^2 - \omega^2 x_c^2) + \int_{t_A}^{t_E} dt \frac{m}{2}(\dot{X}^2 - \omega^2 X^2) =: S_c[x] + S_F[x]. \tag{6}$$

Dazu müssen Sie geeignete Summanden in $L(x, \dot{x})$ partiell integrieren und die Randbedingungen sowie die Differential-Gleichung aus (b) verwenden. Therefore one has to perform an integration by parts in the Lagrangian $L(x, \dot{x})$ and to use the boundary conditions as well as the differential equation in (b). Zusammenfassend lässt sich der Propagator K als Produkt aus einem "klassischen Anteil" und einer Phase (Fluktuationen) schreiben: Finally one can write the propagator K as a composition of a "classical part" and a phase factor (fluctuations):

$$K(x_E, t_E; x_A, t_A) = \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S_c[x]\right\} \phi(t_E - t_A), \tag{7}$$

wobei für S_c gilt: where S_c is given by:

$$S_c = \frac{m\omega}{2\sin[\omega(t_E - t_A)]}\left[(x_E^2 + x_A^2)\cos[\omega(t_E - t_A)] - 2x_E x_A\right] \tag{8}$$