Quantenmechanik II Advanced Topics in Quantum Mechanics

H. Aldahhak, S. M. Wippermann and W. G. Schmidt (aldahhak@mail.upb.de)

Abgabe in Fach 4 auf N3, bis: 10:00 Uhr, den 11.12.2017

Übungsblatt 08 Exercise 08

1. **Die Pauli-Gleichung**
   The Pauli Equation
   Die Pauli-Gleichung The Pauli Equation

$$\left(\frac{1}{2m}\left(\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + e\phi - \mu_B\hat{\vec{\sigma}}\vec{B}\right)\psi = i\hbar\partial_t\psi \tag{1}$$

mit dem Zweierspinor $\psi = (\varphi_1, \varphi_2)^T$ beschreibt den nichtrelativistischen Grenzfall der Dirac-Gleichung with the two-spinor $\psi = (\varphi_1, \varphi_2)^T$ describes the nonrelativistic limit of the Dirac Equation. Leiten Sie eine Kontinutiätsgleichung der Form Derive the continuity equation of the pattern

$$\partial_t\rho - \nabla\vec{j} = 0 \tag{2}$$

her. Identifizieren Sie dabei die Stromdichte $\vec{j}$ und vergleichen Sie diese mit der Stromdichte eines freien Teilchens. Identify the current density and compare it with the current density of a free particle.

2. **Foldy-Wouthuysen transformation**
   Hier führen wir für die Klein-Gordon-Gleichung eine Transformation, die analog zu Foldy-Woutuyuysen ist, ein. Die Transformation führt zu relativistischen Korrekturen. Here we introduce, for the Klein–Gordon equation, a transformation analogous to Foldy-Wouthuysen's, which leads to the relativistic corrections.

   a) Zeigen Sie, dass die Ersetzungen Show that the substitutions $\theta = \frac{1}{2}(\varphi + \frac{i}{m}\frac{\partial\varphi}{\partial t})$ und and $\chi = \frac{1}{2}(\varphi - \frac{i}{m}\frac{\partial\varphi}{\partial t})$ zu einer Matrixdarstellung der Klein–Gordon–Gleichng führen, allow the Klein–Gordon equation $\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = (\nabla^2 - m^2)\varphi$ in der Form to be written as a matrix equation

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial t} = H_0\Phi \tag{3}$$

   wobei where $\Phi = \begin{pmatrix}\theta\\ \chi\end{pmatrix}$ und and $H_0 = -\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\frac{\nabla^2}{2m} + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}m$

   b) Finden Sie die Eigenwerte des Hamilton-Operators Find the eigenvalues of the Hamiltonian.

c) Bestimmen Sie den nicht-relativistischen Grenzfall dieses Hamilton-Operators Find the nonrelativistic limit of this Hamiltonian. Man kann die relativistische Wellenfunktion aus der nicht-relativistischen Wellenfunktion durch You can relate the relativistic wavefunction to the nonrelativistic one by: $\begin{pmatrix} \theta \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \chi_0 \end{pmatrix} e^{-i(m+T)t}$ erhalten, wobei T die kinetische Energie des Teilchens ist where T is the kinetic energy of the particle.