Quantenmechanik II **Advanced Topics in Quantum Mechanics**

H. Aldahhak, S. M. Wippermann and W. G. Schmidt (aldahhak@mail.upb.de)

Abgabe in Fach 4 auf N3, bis: 10:00 Uhr, den 04.12.2017

Übungsblatt 07 Exercise 07

1. **Dirac-Gleichung** **Dirac equation**

   a) Schreiben Sie die Dirac-Gleichung in Hamilton-Form für ein freies Teilchen auf und geben Sie die explizite Form der Dirac-Matrizen an. Write down the Dirac equation in Hamiltonian form for a free particle, and give explicit forms for the Dirac matrices.

   b) Zeigen Sie, dass der Hamilton-Operator H mit dem Operator $\sigma \cdot P$ vertauscht, wobei P der Impulsoperator ist und σ die Pauli Spinoperatoren im Raum von vier Komponentenspinoren sind. Show that the Hamiltonian H commutes with the operator $\sigma \cdot P$ where P is the momentum operator and σ is the Pauli spin operator in the space of four component spinors.

   c) Finden Sie Ebenen-Wellen-Lösungen zu der Dirac-Gleichung in der Darstellung, in der $\sigma \cdot P$ diagonal ist. Hier ist P der Eigenwert des Impulsoperators. Find plane wave solutions of the Dirac equation in the representation in which $\sigma \cdot P$ is diagonal. Here P is the eigenvalue of the momentum operator.

2. **Identität für Pauli-Matrizen** (2 Punkte)
   Identity for Pauli matrices
   Zeigen Sie folgende Identität Show the following identity:

$$\left(\vec{A} \cdot \hat{\vec{\sigma}}\right) \cdot \left(\vec{B} \cdot \hat{\vec{\sigma}}\right) = \vec{A} \cdot \vec{B} + i \left(\vec{A} \times \vec{B}\right) \cdot \hat{\vec{\sigma}} \tag{1}$$

3. **Klein Paradox** **Klein Paradox**

   Im Anschluss an die Berechnung der relativistischen ebenen Wellen, die auf ein Stufenpotential einwirken (wie in der Vorlesung gezeigt), betrachten wir das Problem der Übertragung durch eine stufenförmige Barriere mit der Breite a und der Höhe eV. Wenden Sie die Randbedingungen an der Potentialstufenschnittstelle an und zeigen Sie dass die Übertragungswahrscheinlichkeit durch: Following on from the calculation of the relativistic plane wave incident upon a step potential (as shown in the lecture), consider the problem of transmission through a step-like barrier of width a and height eV. Apply the boundary conditions at the potential step interface, show that the transmission probability is given by

$$\left|t^2\right| = \frac{1}{\left|cos(\grave{p}a) - isin(\grave{p}a)(1+\zeta^2)/2\zeta\right|^2} \tag{2}$$

gegeben ist. wobei where

$$c = 1, \zeta = \frac{\grave{p}(p^0 + m)}{p(\grave{p}^0 + m)}, E \equiv p^0, \grave{E} \equiv \grave{p}^0 = E - eV$$

Analysieren Sie die Übertragungswahrscheinlichkeit in den Energiebereichen $\grave{p}^0 \equiv \grave{E} > m$, $-m < \grave{E} < m$, and $\grave{E} < -m$. Erklären Sie im dritten Regime, warum eine perfekte Übertragung erreicht werden kann. analyse the transmission probability in the energy ranges $\grave{p}^0 \equiv \grave{E} > m$, $-m < \grave{E} < m$, and $\grave{E} < -m$. In the third regime, explain why a condition of perfect transmission can be obtained.