Quantenmechanik II Advanced Topics in Quantum Mechanics

H. Aldahhak, S. M. Wippermann and W. G. Schmidt (aldahhak@mail.upb.de)

Abgabe in Fach 4 auf N3, bis: 10:00 Uhr, den 27.11.2017

Übungsblatt 06 Exercise 06

1. **Klein-Gordon-Gleichung Klein Gordon equation** (2 Punkte)

   Betrachten wir $\psi(\vec{r},t)$ als Lösung der freien Klein-Gordon-Gleichung mit $\psi(\vec{r},t) = \varphi(\vec{r},t) \cdot \exp -\frac{i}{\hbar}mc^2t$. Unter welchen Bedingungen ist $\varphi(\vec{r},t)$ die Lösung der nicht-relativistischen Schrödinger-Gleichung?

   Let $\psi(\vec{r},t)$ be a solution of the free Klein-Gordon equation. Let us write $\psi(\vec{r},t) = \varphi(\vec{r},t) \cdot \exp -\frac{i}{\hbar}mc^2t$. Under what conditions will $\varphi(\vec{r},t)$ be a solution of the non-relativistic Schrödinger equation?

2. **Dirac-Matrizen Dirac matrices** (2 Punkte)

   Betrachtet man die Definition Given the definitions
   $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,
   wobei α sind die Pauli Matrizen where α represents the Pauli spin matrices.

   a) Überprüfen Sie die Identität der Pauli-Matrizen Verify the Pauli matrix identity $\sigma_i\sigma_j = i\varepsilon_{ijk}\sigma_k + \delta_{ij}$, wobei ε_{ijk} den antisymmetrischen Tensor darstellt where ε_{ijk} represents the antisymmetric tensor.

   b) Identifizieren Sie eine fünfte Matrix γ_5, die mit allen α_i and β antikommutiert. Vergleichen Sie diese Matrix mit dem Matrixprodukt $\beta\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ Identify a 5th matrix γ_5 which anticommutes with all the α_i and β. Compare this matrix with the matrix product $\beta\alpha_1\alpha_2\alpha_3$.

3. **Lorentz-Transformation Lorentz transformation** (6 Punkte)

   Betrachtet werden zwei Koordinatensysteme Σ und Σ'. Dabei bewegt sich Σ' mit der Relativgeschwindigkeit $\vec{v} = v\vec{e_x}$. Die Lorentz-Transformation kann nun folgendermaßen definiert werden:

   Consider two reference frames Σ and Σ'. Where, Σ' is in motion with the relative velocity $\vec{v} = v$. The Lorentz transformation can now be defined as follows:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\psi & -\sinh\psi & 0 & 0 \\ -\sinh\psi & \cosh\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1}$$

mit with

$$\cosh\psi = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \qquad \sinh\psi = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma\beta \quad . \tag{2}$$

a) Das ruhende System Σ befindet sich am Ort $x = x_0, y = 0, z = 0$ und sendet zu den Zeitpunkten t_1 und t_2 zwei Signale, wobei $t_2 > t_1$. Das System Σ' bewegt sich mit der Relativgeschwindigkeit $\vec{v} = v\vec{e_x}$ und empfängt die Signale. Leiten Sie ausgehend von diesem Szenario die Zeitdilatation her. Was bedeutet eigentlich Zeitdilatation? Was passiert, wenn System Σ' die Signale sendet und Σ diese empfängt?
The stationary system Σ exists at a position $x = x_0, y = 0, z = 0$ and sends at times t_1 and t_2 two signals, where $t_2 > t_1$. The system Σ' is in motion with the relative velocity $\vec{v} = v\vec{e_x}$ and receives the signals. From this scenario, derive the time dilation. What does time dilation mean? What happens if the system Σ' sends the signals Σ' and Σ receives them?

b) Ein zweidimensionales Objekt in der Ebene mit $z = 0$ besitzt im ruhenden Koordinatensystem Σ die Eckpunkte x_1 und x_2. Dieses Objekt wird nun im bewegten System Σ' gemessen. Leiten Sie die Längenkontraktion her. Was bedeutet Längenkontraktion? Was passiert, wenn in System Σ ein Objekt gemessen wird, dass in Σ die Eckpunkte x'_1 und x'_2 besitzt?
A two-dimensional object, exists in the plane $z = 0$. Its two edges have coordinates of x_1 und x_2 in the stationary reference frame Σ. This object is now measured in the moving reference frame Σ'. Derive the length contraction. What does the length contraction mean? What happens if an object, whose edges have the coordinates x'_1 and x'_2 , is measured in the reference system Σ?

c) Betrachtet werden nun drei Systeme Σ_1, Σ_2 und Σ_3. Σ_2 bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = v_A\vec{e_x}$ relativ zu Σ_1. Σ_3 bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = v_B\vec{e_x}$ relativ zu Σ_2, sowie mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = v_C\vec{e_x}$ relativ zu Σ_3. Leiten Sie das relativistische Additionstheorem für Geschwindigkeiten her. Welche Folge hat das Additionstheorem?
Considering now three refernece frames Σ_1, Σ_2 and Σ_3. Σ_2 is in motion relative to a Σ_1 with the velocity $\vec{v} = v_A\vec{e_x}$. Σ_3 is in motion with the velocity $\vec{v} = v_B\vec{e_x}$ relative to Σ_2, as well as with the velocity $\vec{v} = v_C\vec{e_x}$ relative to Σ_3. Derive the special relativity addition formula for velocities. How does the addition formula affected?