Quantenmechanik II Advanced Topics in Quantum Mechanics

H. Aldahhak, S. M. Wippermann and W. G. Schmidt (aldahhak@mail.upb.de)

Abgabe in Fach 4 auf N3, bis: 10:00 Uhr, den 13.11.2017

Übungsblatt 04 Exercise 04

1. **Teilchen im elektromagnetischen Feld** (3 Punkte)
   Particles in electromagnetic field (3 points)

   Betrachten wir Lagrange –Funktion $L = T - V$ mit verallgemeinerten Potential V. Aus dem lässt sich die generalisierten Kräfte Q_i abzuleiten consider the Lagrange function $L = T - V$ which gives rise to the generalized forces Q_i

   $$Q_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i} \qquad (1)$$

   Zeigen Sie dass diese generalisierte Kraft genau Anlass zur Lorentz–Kraft auf ein bewegtes Teilchen im elektromagnetischen Feld Show that the generalized force corresponds to the Lorentz force on a particle moving in an electromagnetic field $\vec{F} = q\overrightarrow{E} + \frac{q}{c}\overrightarrow{\vartheta} \times \overrightarrow{B}$ gibt, wenn when

   $$V = -\frac{q}{c}\overrightarrow{A}.\overrightarrow{\vartheta} + q\varphi \qquad (2)$$

   mit

   $$\overrightarrow{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} \qquad (3)$$

   und and

   $$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A} \qquad (4)$$

   wobei $\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r},t)$ die elektrische Feldstärke, $\overrightarrow{B}(\overrightarrow{r},t)$ das Magnetfeld, $\overrightarrow{A}(\overrightarrow{r},t)$ und $\varphi(\overrightarrow{r},t)$ die Vektor- und Skalarpotentiale sind. where $\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r},t)$ is the electric field, $\overrightarrow{B}(\overrightarrow{r},t)$ is the magnetic field, $\overrightarrow{A}(\overrightarrow{r},t)$ and $\varphi(\overrightarrow{r},t)$ are the vector and scalar potentials

2. **Spinoperatoren** (3 Punkte) **Spin operators** (3 points)
   Der Spin wird durch den vektoriellen Spinoperator The spin is described by the operator

   $$\hat{\vec{S}} = \hat{S}_x\vec{e}_x + \hat{S}_y\vec{e}_y + \hat{S}_z\vec{e}_z \qquad (5)$$

   beschrieben.

a) Die Komponenten des Drehimpulsoperators erfüllen die Vertauschungsrelation The components of the angular-momentum operator fulfill the commutation relation

$$[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{S}_k \quad . \tag{6}$$

Zeigen Sie, dass auch folgender Kommutator gilt: Show either that the commutation relation holds: $[\hat{S}^2, \hat{S}_z] = 0$.

b) Zeigen Sie, dass sich über die sog. Leiteroperatoren Show that making use of the ladder operators $\hat{S}_\pm = \hat{S}_x \pm i\hat{S}_y$ schreiben lässt one can write:

$$\hat{S}_\pm S_\mp = \hat{S}^2 - \hat{S}_z^2 \pm \hbar\hat{S}_z \quad \text{und and} \quad [\hat{S}_z, \hat{S}_\pm] = \pm\hbar\hat{S}_\pm \quad . \tag{7}$$

c) Die Komponenten des Spinoperators sind folgendermaßen definiert The components of the spin operators are defined as follows:

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad . \tag{10}$$

Damit ergibt sich der aus der Vorlesung bekannte Erwartungswert für That implies the well known expectation value for $\hat{S}_z$:

$$\left\langle \hat{S}_z \right\rangle = \left\langle \varphi \middle| \hat{S}_z \middle| \varphi \right\rangle = \frac{\hbar}{2}\left(|a|^2 - |b|^2\right) \tag{11}$$

mit with $\varphi = ae^{-i\omega_0 \frac{t}{2}}\psi_\uparrow + be^{i\omega_0 \frac{t}{2}}\psi_\downarrow$.

Zeigen Sie, dass sich analog $\left\langle \hat{S}_x \right\rangle \propto cos\left(\omega_0 t + \phi\right)$ und $\left\langle \hat{S}_x \right\rangle \propto sin\left(\omega_0 t + \phi\right)$ ergibt, wobei sich ϕ aus der Polarzerlegung von a und b ergibt. Show accordingly that $\left\langle \hat{S}_x \right\rangle \propto cos\left(\omega_0 t + \phi\right)$ and $\left\langle \hat{S}_x \right\rangle \propto sin\left(\omega_0 t + \phi\right)$, where ϕ is the argument derived from the polar form of a and b.

3. **Spin im Magnetfeld** (3 Punkte) **Spin in a magnetic field** (3 points)

Ein Spin-1/2-Teilchen mit dem magnetischen Moment $\mu = \mu_0 s$ und spin s befindet sich in einem konstanten Magnetfeld entlang der x-Achse. Bei $t = 0$ befindet sich das Partikel im Zustand $s_z = +1/2$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen in einem späteren Zeitpunkt im Zustand $s_y = \pm 1/2$ zu finden.

A particle with magnetic moment $\mu = \mu_0 s$ and spin s, with magnitude 1/2, is placed in a constant magnetic field pointing along the x-axis. At $t = 0$, the particle is found to have $s_z = +1/2$. Find the probabilities at any later time of finding the particle with $s_y = \pm 1/2$.

4. **Der Elektronspin** (Wahlweise) (+2 Punkte) **The electron spin (optional) (+2 points)**

Die Spinfunktionen für ein freies Elektron in einer Basis, wo $\hat{s_z}$ diagonal ist, können als $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ geschrieben werden. Die Eigenwerte von $\hat{s_z}$ sind dann +1/2 und -1/2. Mit Benutzung diese Basis finden Sie eine normalisierte Eigenfunktion von $\hat{s_y}$, die den Eigenwert -1/2 hat (betrachten Sie $\hbar = 1$). The spin functions for a free electron in a basis where $\hat{s_z}$ is diagonal can be written as $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ with eigenvalues of $\hat{s_z}$ being +1/2 and -1/2 respectively. Using this basis find a normalized eigenfunction of $\hat{s_y}$ with eigenvalue -1/2 (consider $\hbar$=1).