Quantenmechanik II – Advanced Topics in Quantum Mechanics

H. Aldahhak, S. M. Wippermann and W. G. Schmidt (aldahhak@mail.upb.de)

Abgabe in Fach 4 auf N3, bis: 10:00 Uhr, den 30.10.2017

Übungsblatt 03 Exercise 3

1. **Das Ritz'sche Variationsprinzip The Ritz Variational principle**

   Betrachten wir einen eindimensionalen harmonischen Oszillator: consider a one-dimensional harmonic oscillator

   $$H = -\frac{\hbar}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}mw^2x^2$$

   (a) Für die Versuchswellenfunktionen $\psi = (a^2 - x^2)^2$ für $|x| \leq a$ und $\psi = 0$ sonst, finden Sie die Wellenfunktion, die $< H >$ minimieren. Was ist der Wert von $< H >_{min}$? consider the trial wave function $\psi = (a^2 - x^2)^2$ for $|x| \leq a$ and $\psi = 0$ else, and find the wave function which minimizes $< H >$. What is the value of $< H >_{min}$?

   (b) Für eine andere Versuchswellenfunktionen $\psi = e^{-ax^2/2}$ finden Sie eine Wellenfunktion, die $< H >$ minimieren und berechnen Sie $< H >_{min}$. Consider another wave function of the form $\psi = e^{-ax^2/2}$ and find again the wave function which minimizes $< H >$ and discuss the results of (a) and (b).

   Für (a) und (b) diskutieren Sie die Ergebnisse.

   Hinweise: Hint:

   $$\int_0^\infty x^n e^{-\gamma x} dx = \frac{\Gamma(n+1)}{\gamma^{n+1}} \tag{1}$$

   $$\int_0^\infty x^n e^{-\gamma x^2} dx = \frac{0.5\Gamma((n+1)/2)}{\gamma^{(n+1)/2}} \tag{2}$$

   $$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n), \quad \Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(0.5) = \sqrt{\pi} \tag{3}$$

2. **Teilchen im elektromagnetischen Feld A particle in an electromagnetic field**

   Ein geladenes Teilchen q mit der Masse m befindet sich in einem konstanten elektrisches Feld E. A particle of charge q and mass m is subject to a uniform electrostatic field E.

(a) Schreiben Sie die zeitabhängige Schrödingergleichung für dieses System auf. Write down the time-dependent Schrödinger equation for this system.

(b) Zeigen Sie, dass der Erwartungswert des Positionsoperators dem zweiten Newtons Bewegungsgesetz folgt, wenn das Teilchen in einem beliebigen Zustand $\psi(r,t)$ ist. Show that the expectation value of the position operator obeys Newton's second law of motion when the particle is in an arbitrary state $\psi(r,t)$.

3. **Ein geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld A charged particle in an electromagnetic field**

Der Hamilton-Operator eines spinlos geladenen Teilchens in einem elektromagnetischen Feld lautet Consider the Hamiltonian of a spinless charged particle in a magnetic field.

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{p} - \frac{e}{c}A)^2$$

(a) Zeigen Sie, dass die Eichtransformation $A(r) \to A(r) + \nabla f(r)$ äquivalent zur Multiplikation der Wellenfunktion mit dem Faktor $e^{[ief(r)/\hbar c]}$ ist. Show that the gauge transformation $A(r) \to A(r) + \nabla f(r)$ is equivalent to multiplying the wave function by the factor $e^{[ief(r)/\hbar c]}$.

(b) Betrachten wir ein konstantes Feld B entlang der z-Achse. Zeigen Sie, dass die Energiezustände des Systems sind Consider the case of a uniform field B directed along the z-axis. Show that the energy levels of the system can be written as

$$E = (n + \tfrac{1}{2})\frac{|e|\hbar}{mc}B + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}$$

Hinweis: Benutzen Sie die Eichung $A_x = -By, A_y = A_z = 0$. Sie können die folgende Wellenfunktion als die Lösung zur entsprechenden Schrödingergleichung im Anspruch nehmen Hint: use the gauge where $A_x = -By, A_y = A_z = 0$. You can use the following wave function

$$\psi(x,y,z) = e^{i(p_x x + p_z z)/\hbar}\chi(y)$$

as a solution for the corresponding Schrödinger equation.