Quantenmechanik II – Advanced Topics in Quantum Mechanics

H. Aldahhak, P. Sharapova, S. M. Wippermann, und W.G. Schmidt

---

Übungsblatt 1 – Excercise 1

1. **Lineare Operatoren – Linear Operators**
   A, B, C seien lineare Operatoren. Beweisen Sie folgende Identitäten:
   A, B, C are linear operators. Prove the following identities:
   a) $[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$
   b) $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$
   c) $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$ (Jacobi-Identität Jacobi identity)

2. **Harmonischer Oszillator – Harmonic Oscillator**
   Der harmonische Oszillator wird über folgenden Hamiltonoperator beschrieben:
   The harmonic oscillator is decribed by the following Hamiltonian:

$$H = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 x^2 \quad . \tag{1}$$

Dies führt auf die folgende Schrödingergleichung:
This results in the following Schrödinger equation:

$$\frac{\hbar\omega}{2}\left(\xi^2 - \frac{d^2}{d\xi^2}\right)\psi = E\psi \quad . \tag{2}$$

Dabei benutzen wir die dimensionslose Größe ξ definiert über
Here, we introduce the dimensionless quantity ξ defined by

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\xi \quad . \tag{3}$$

Wir können nun die folgenden Operatoren einführen:
Now, we can introduce the following operators:

$$b^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi - \frac{d}{d\xi}\right) \tag{4}$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi + \frac{d}{d\xi}\right) \quad . \tag{5}$$

a) Zeigen Sie, dass folgende Vertauschungsrelationen gelten:
Show that the following commutational relations are valid:

$$[b, b^+] = 1 \tag{6}$$

$$[b, b] = 0, \quad [b^+, b^+] = 0 \tag{7}$$

$$[b^m, b^+] = mb^{m-1}, \quad [b, (b^+)^m] = m(b^+)^{m-1} \tag{8}$$

b) Beschreiben Sie die Wirkungsweise der Operatoren b^+ und b auf die Eigenzustände $\{|n\rangle\}_{n=0}^{\infty}$ des harmonischen Oszillators.
Describe how the operators b^+ and b act on the eigenstates $\{|n\rangle\}_{n=0}^{\infty}$ of the harmonic oscillator.

c) Drücken Sie den Ortsoperator x, den Impulsoperator p sowie den Hamiltonoperator H durch die Operatoren b^+ und b aus.
Rewrite the position operator x, the momentum operator p and the Hamiltonian H in terms of b^+ and b.

d) Berechnen Sie den Erwartungswert der kinetischen Energie $\langle T \rangle$ und der potentiellen Energie $\langle V \rangle$ im Zustand $|n\rangle$.
Calculate the expectation value of the kinetic energy $\langle T \rangle$ and of the potential energy $\langle V \rangle$ in the state $|n\rangle$.

3. **Harmonischer Oszillator mit Störung – Harmonic Oscillator with a perturbation** (5 Punkte)

Der eindimensionale Harmonische Oszillator unterliegt den folgenden Störungen
The one dimensional Harmonic Oscillator is subject to the following perturbations:

a) Quadratische Störung Quadratic perturbation:

$$V(x) = \lambda x^2 \tag{9}$$

b) Kubische Störung Cubic perturbation:

$$V(x) = \lambda x^3 \tag{10}$$

c) Quartische Störung Quartic perturbation:

$$V(x) = \lambda x^4 \tag{11}$$

Berechnen Sie für alle drei Störungen die Energiekorrekturen in 1. Ordnung Störungstheorie. Hierbei ist es sinnvoll x^α (mit $\alpha = 2, 3, 4$) durch Auf- und Absteigeoperatoren darzustellen. Vergleichen Sie insbesondere das Ergebnis für $V(x) = \lambda x^2$ mit dem exakten Resultat, welches Sie unter Berücksichtigung von Aufg. (2) gewinnen können.

Calculate the energy corrections in first-order perturbation theory for the three perturbations. It is usefull to express x^α (with $\alpha = 2, 3, 4$) by creation and annihilation operators. In particular compare the result for $V(x) = \lambda x^2$ with the exact result, which one can obtain by taking exercise (2) into account.