zu Aufgabe 2c):

$$\Delta V(\vec{r}) = \begin{cases} V_N(r) - V_C(r) & 0 \le r \le r_0 \\ 0 & \text{für } r \ge r_0 \end{cases} = \Delta V(r)$$

als kleine radialsymmetrische Störung

(„klein" wegen $r_0 \ll a_0(Z) = \frac{\hbar^2}{Z m_e e^2}$ als Bohrscher Radius

$= \frac{1}{Z} r_B \; (0.529\,\text{Å})$)

Einschub: Störungsrechnung 1. Ordnung
für radialsym. Störung $\Delta V(r)$:

$$\Longrightarrow \quad H_0 \varphi_n^{(0)}(\vec{r}) = \mathcal{E}_n^{(0)} \varphi_n^{(0)}(\vec{r}) \, ; \quad \mathcal{E}_n^{(1)} = \mathcal{E}_n^{(0)} + \Delta \mathcal{E}_n^{(1)}$$

mit $\rightsquigarrow \Delta \mathcal{E}_n^{(1)} = \langle n^{(0)} | \Delta V(\vec{r}) | n^{(0)} \rangle$

$$= \int \underbrace{\varphi_n^{(0)*}(\vec{r})}_{= Y_l^{m*}(\hat{r}) R_{nl}^*(r)} \underbrace{\Delta V(\vec{r})}_{= \Delta V(r)} \varphi_n^{(0)}(\vec{r}) \, d^3r$$

$$= \underbrace{\iint_{\vartheta,\varphi} Y_l^{m*}(\hat{r}) Y_l^{m}(\hat{r}) \, d\Omega}_{\text{Eins durch Normierung}} \int_0^\infty R_{nl}^*(r) \Delta V(r) R_{nl}(r) \times r^2 dr$$

$d\Omega = \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$

$$\Delta \mathcal{E}_n^{(1)} = \int_0^\infty |R_{nl}(r)|^2 \Delta V(r) \, r^2 \, dr$$

✓

Nun: Grundzustand des H-Atoms:

$$\psi_{1,0,0}(\vec{r}) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{4\pi}}}_{= Y_0^0(\hat{r})} \cdot \underbrace{\frac{2}{\sqrt{a_0^3}} e^{-r/a_0}}_{= R_{1,0}(r)}$$

$$\rightsquigarrow \Delta E_n^{(1)} = \int_0^\infty \frac{4}{\sqrt{a_0^3}} e^{-2r/a_0} \cdot \Delta V(r)\, r^2\, dr$$

mit $\Delta V(r)$ nach $(*)$:

$$= \int_0^{r_0} \frac{4}{\sqrt{a_0^3}} e^{-2r/a_0} \left(\frac{Ze^2}{2r_0} \left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - 3 + \frac{2r_0}{r} \right] \right) r^2\, dr$$

wegen $r \in [0, r_0]$ und $r_0 \ll a_0$
folgt $r \ll a_0$ und somit in sehr guter Näherung:

$$e^{-2r/a_0} \approx 1.$$

$$\approx \int_0^{r_0} \frac{\cancel{4}^{2}}{\sqrt{a_0^3}^{2}} \left(\frac{Ze^2}{\cancel{2}r_0} \left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - 3 + \frac{2r_0}{r} \right] \right) r^2\, dr$$

$$= \frac{2Ze^2}{r_0\, a_0^{3/2}} \cdot \int_0^{r_0} \left[\frac{r^4}{r_0^2} - 3r^2 + 2r_0 r \right] dr$$

$$= \frac{2Ze^2}{a_0^{3/2}} \left[\frac{r^5}{5r_0^2} - r^3 + r_0 r^2 \right]_0^{r_0}$$

$$= \frac{2Ze^2}{a_0^{3/2}} \left[\frac{r_0^3}{5} \right]$$

$$= \frac{4}{5} \left(\frac{r_0}{a}\right)^2 \underbrace{|E_{Ryd}|}_{= \frac{Ze^2}{a} \approx 13.6\,\mathrm{eV} \cdot Z}$$