
**Gruppentheorie
Sommersemester 2019**

Übungsblatt 5: Darstellungen

Aufgabe 1

- (a) Beschreiben Sie in kurzen Worten, was eine Darstellung ist und welche Eigenschaften diese aufweisen muss.
- (b) Sei $G_a \mapsto T(G_a)$ eine Darstellung einer Gruppe.
Zeigen Sie, dass $G_a \mapsto T^*(G_a)$ ebenfalls eine Darstellung ist.
Warum sind $G_a \mapsto T^\dagger(G_a)$ und $G_a \mapsto T^{-1}(G_a)$ keine Darstellungen?

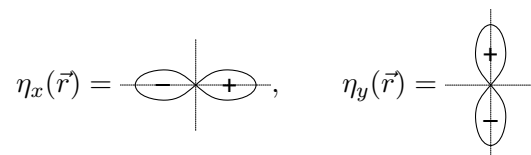
Aufgabe 2

Untersuchen Sie die Anwendung der Symmetrieoperation der Punktgruppe C_{3v} auf atomare p_x - und p_y -Orbitale. Die Drehachse steht senkrecht auf der xy -Ebene, das Atom liegt im Ursprung.

Die Orbitale lassen sich vereinfacht durch folgende Funktionen beschreiben

$$\begin{aligned}\eta_x(\vec{r}) &= xe^{-\alpha r} = (\vec{r} \cdot \vec{e}_x)e^{-\alpha r} \\ \eta_y(\vec{r}) &= ye^{-\alpha r} = (\vec{r} \cdot \vec{e}_y)e^{-\alpha r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}\end{aligned}$$

und haben folgende räumliche Geometrie:



- (a) Bestimmen Sie die Wirkung der Symmetrieoperationen auf anschaulichem Weg, indem Sie η_x und η_y als Basisvektoren eines 2-dimensionalen Raums betrachten.
- (b) Berechnen Sie nun die Wirkung anhand der Gleichung für Transformationen im Funktionsraum und vergleichen Sie das Ergebnis mit (a).

Hinweis: Es genügt, wenn Sie sich auf ein C_3 und ein σ_v beschränken.

Aufgabe 3

Gegeben seien zwei Gruppen (G, \cdot) und (H, \star) . Eine Abbildungen $\phi : G \mapsto H$ heißt ein Gruppenhomomorphismus, wenn für alle Elemente $G_a, G_b \in G$ gilt:

$$\phi(G_a \cdot G_b) = \phi(G_a) \star \phi(G_b).$$

Damit sind alle Darstellungen Gruppenhomomorphismen.

Welche der folgenden Abbildungen sind Gruppenhomomorphismen?

- (a) $f : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$, $m \mapsto am$ für ein festes $a \in \mathbb{Z}$
- (b) $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{R}$, $z \mapsto \|z\|$
- (c) $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+$, $x \mapsto \exp(x)$
- (d) $f : C^1 \mapsto C^1$, $g(x) \mapsto g'(x)$

Hinweis: Die Verknüpfung von C^1 sei die Verkettung $g(x) \circ h(x) = g(h(x))$

Der Übungszettel wird am Dienstag, den 21.05.2019 in der Übung besprochen
