Christian Braun
Universität Paderborn

16. April 2019

Gruppentheorie
Sommersemester 2019

Übungsblatt 2: Matrixgruppen und direktes Produkt

Aufgabe 1: Matrixgruppen

In der Vorlesung haben Sie bereits gesehen, dass die symmetrische Gruppe S_3 isomorph zur Diedergruppe D_3 ist. Alternativ zur Permutation lassen sich die Elemente einer Gruppe auch als Matrizen schreiben.

Bestimmen Sie eine Matrixgruppe, die isomorph zur symmetrischen Gruppe S_3 ist.

Hinweis: Überlegen Sie sich, welche Matrizen die Eckpunkte eines Dreiecks entsprechend der Diedergruppe D_3 ineinander überführen.

Aufgabe 2: Spezielle orthogonale und unitäre Gruppe

Betrachte die folgende unendliche Menge reeller 2×2–Matrizen:

$$\mathrm{SO}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \;\middle|\; \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

Diese Gruppe ist als die *spezielle orthogonale Gruppe* bekannt.

(a) Weisen Sie nach, dass SO(2) bezüglich der Matrixmultiplikation als Verknüpfung eine Gruppe bildet.

(b) Ist die Gruppe abelsch?

(c) Welches geometrische Objekt besitzt SO(2) als Symmetriegruppe?

(d) Die obige Menge kann auch komplex geschrieben werden als

$$\mathrm{U}(1) = \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$$

und ist als *unitäre Gruppe* bekannt. Zeigen Sie auch hier, dass die U(1) unter der gewöhnlichen Multiplikation eine Gruppe bildet.

Christian Braun
Universität Paderborn

16. April 2019

Aufgabe 3: Direktes Produkt zweier Gruppen

Sind zwei Gruppen $(G, \star)$ und $(H, \circ)$ gegeben, so lässt sich leicht eine neue Gruppe daraus konstruieren. Als Menge verwendet man das kartesische Produkt von G und H, also die Menge aller Tupel,

$$G \times H = \{(a, x) \mid a \in G, x \in H\}, \tag{1}$$

und definiert die Verknüpfung $*$ auf $G \times H$ komponentenweise als

$$(a, x) * (b, y) := (a \star b, x \circ y). \tag{2}$$

(a) Zeigen Sie, dass $(G \times H, *)$ wieder eine Gruppe ist, welche man als direktes Produkt von G und H bezeichnet.

(b) Zeigen Sie, dass $G \times H$ genau dann kommutativ ist, wenn G und H es sind.

(c) Was ergibt sich für $G \times H$, wenn $G = H = \mathbb{R}$ ist und beide Verknüpfungen $\star$ und $\circ$ die gewöhnliche Addition sind?

Der Übungszettel wird am Dienstag, den 23.04.2019 in der Übung besprochen