Christian Braun
Universität Paderborn

9. April 2019

# Gruppentheorie
# Sommersemester 2019

## Übungsblatt 1: Gruppen & Gruppentafeln

### Aufgabe 1: Beweis zur Gruppentafel

Es ist nützlich, für jede Gruppe eine sogenannte *Gruppentafel* wie in der Tabelle unten zu erstellen.

| $G$ | $e$ | $a$ | $b$ | $\cdots$ | $k$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $a$ | $b$ | $\cdots$ | $k$ | $\cdots$ |
| $a$ | $a$ | $a^2$ | $ab$ | $\cdots$ | $ak$ | $\cdots$ |
| $b$ | $b$ | $ba$ | $b^2$ | $\cdots$ | $bk$ | $\cdots$ |
| $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ |
| $k$ | $k$ | $ka$ | $kb$ | $\cdots$ | $k^2$ | $\cdots$ |
| $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ |

Jeder Verknüpfung kann wieder ein Element aus der Gruppe zugeordnet werden (z.B. $ab \to d$).

Beweisen Sie unter Verwendung der Gruppenpostulate: In jeder Zeile und in jeder Spalte der Gruppentafel erscheinen jeweils alle Elemente der Gruppe genau einmal.

### Aufgabe 2: Realisierung einer Gruppe der Ordnung $g = 3$

(a) Zeigen Sie unter Verwendung der Gruppenpostulate, dass es nur eine einzige (abstrakte) Realisierung einer Gruppe der Ordnung $g = 3$ gibt.

*Hinweis:* Verwenden Sie dazu die eingeführte Gruppentafel aus vorheriger Aufgabe.

(b) Weisen Sie nach, dass die Gruppe abelsch ist.

### Aufgabe 3: Realisierung einer Gruppe der Ordnung $g = 4$

(a) Zeigen Sie direkt durch Benutzung der Gruppenpostulate, dass es nur zwei (abstrakte) Realisierungen einer Gruppe der Ordnung $g = 4$ gibt.

*Hinweis:* Auch hier helfen Gruppentafel beim Lösen der Aufgabe. Beachten Sie, dass die Reihenfolge und Bezeichnungen der Elemente in der Gruppentafel willkürlich ist.

(b) Verifizieren Sie, dass beide Gruppe abelsch sind.

(c) Können Sie je eine anschauliche Realisierung der beiden Gruppen finden?

**Der Übungszettel wird am Dienstag, den 16.04.2019 in der Übung besprochen**