UNIVERSITÄT PADERBORN
Die Universität der Informationsgesellschaft
Dr. Uwe Gerstmann
Dr. Christian Thierfelder

Physik D – Atom-, Molekül- und Kernphysik
SS 2010
25.06.2010

Übungsblatt 12 – Zur klassischen Beschreibung der Atome

Abgabe: Fr 02.07.2010 (bis 12:00 Uhr im Briefkasten auf N3)
Besprechung: Fr 09.07. 12:00 Uhr – 13:30 Uhr im Sondertermin (anstelle Vorlesung)

Atomspektroskopie:
klassische, semi-klassische oder quantenmechanische Behandlung?

Eine *einheitliche* Beschreibung aller Effekte der Atomphysik auf der mikroskopischen Skala ist nur im Rahmen der Quantenmechanik möglich. Manche Ergebnisse werden aber auch durch die klassische Physik richtig beschrieben. Das Problem besteht allerdings darin, daß man nicht *a priori* weiss, wann dies der Fall ist. Das Theorem von Ehrenfest (siehe Physik C) liefert hierfür wichtige Hinweise:

„Die zeitliche Entwicklung der quantenmechanischen Erwartungswerte gehorcht den klassischen Bewegungsgleichungen."

1. *Bewegung eines ungeladenen Spin-1/2-Teilchens im Magnetfeld*

In einem Stern-Gerlach-Versuch fliege ein ursprünglich parallel zur y-Achse ausgerichteter Strahl von ungeladenen Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen durch das inhomogene Magnetfeld

$$\vec{B}(\vec{r}) = c_1 x \vec{e_x} + (B_z(0) + c_2 z)\vec{e_z}$$

(a) Sind die drei Konstanten $B_z(0)$, c_1 und c_2 unabhängig voneinander wählbar?

(b) Zur Zeit $t = 0$ liege ein Strahl von Teilchen in einem normierten Spinzustand, dem Spinor $\chi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vor. Berechnen Sie

$$\vec{F}_{qm} := \left\langle \chi \,\middle|\, \vec{\nabla}\left(\mu_B\, \vec{\sigma} \cdot \vec{B}\right) \,\middle|\, \chi \right\rangle .$$

Warum stellt dies im hier betrachteten Fall den zugehörigen quantenmechanischen Erwartungswert der magnetischen Ablenkkraft dar?

(c) Die Ablenkung dieses Teilchenstrahls kann in semi-klassischer Näherung durch die folgende Newtonsche Bewegungsgleichung beschrieben werden:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{qm}$$

Welche klassische Bahnkurve $\vec{r}(t)$ ergibt sich für ein Teilchen, auf das die Kraft $\vec{F}_{qm}$ aus Aufgabenteil (a) wirkt, und das sich zur Zeit $t = 0$ parallel zur y-Achse bewegt?
Welcher Ablenkwinkel liegt vor, wenn das Teilchen zum Zeitpunkt $t = T$ auf einen Detektor trifft?

(d) Welche ungeladene Spin-1/2-Teilchen gibt es?

– bitte wenden –

2. *Exakte Lösung des Zeeman-Effekts mit Hilfe der klassischen Physik*

Der Zeeman-Effekt läßt sich klassisch mit Hilfe der DGL eines harmonischen Oszillators beschreiben, wobei zusätzlich wegen der Anwesenheit des Magnetfelds die Lorentz-Kraft auftritt. In der Vorlesung wurde dies für den Fall diskutiert, daß die Larmor-Frequenz $\omega_L = \frac{eB}{2m}$ gegenüber der Kreisfrequenz ω_0 des Elektrons zu vernachlässigen ist.
Wir wollen nun den allgemeinen Fall ohne diese Näherung betrachten, und zeigen, daß die Lorentzsche Theorie diesen Aspekt des Zeeman-Effekts einschließlich der Polarisation der Linien richtig beschreibt.

(a) Das homogene Magnetfeld habe wie in der Vorlesung die Richtung der z-Achse. Entkoppeln Sie das sich klassisch ergebende DGL-System *ohne die in der Vorlesung angenommene Einschränkung* mit dem Ansatz $x = ae^{iwt}$ und $y = be^{iwt}$. Zeigen Sie, daß der Abstand der verschobenen Zeeman-Linien auch im allgemeinen Fall $2\omega_L$ beträgt.

(b) Skizzieren Sie den Verlauf der verschobenen Zeeman-Linien für den Fall, daß die Frequenz ω_0 der Elektronen ungefähr mit der Larmor-Frequenz ω_L übereinstimmt.

(c) Diskutieren Sie die Polarisationseigenschaften der verschobenen Zeeman-Linien. Berechnen Sie dazu den Quotienten $\frac{a}{b}$ der im Aufgabenteil (a) eingeführten Amplituden a und b.

3. *Grenzen der klassischen Beschreibung der Atome – Strahlungskatastrophe*

In Aufgabe 2 wurde vorausgesetzt, daß es zu keinen dissipativen Energieverlusten kommt. Tatsächlich kommt es aber gemäß der Maxwell-Theorie bei zeitlich veränderlichen elektromagnetischen Feldern zur Abgabe von Strahlungswärme, so daß sich nach der klassischen Theorie die Bahn des Elektrons am Ende zeitlich verändern würde:

Bei jedem Umlauf verliere das um den Atomkern kreisende Elektron den Bruchteil ε seiner jeweils vorhandenen kinetischen Energie durch die Abgabe von Strahlungswärme.

(a) Berechnen Sie die Umlaufdauer T_i in Abhängigkeit von der Anzahl i der bereits zuvor durchgeführten Umläufe.

(b) Das Elektron führt offensichtlich eine unendliche Folge von Umläufen mit immer kleiner werdendem Bahnradius durch. Kommt das Elektron trotzdem nach einer endlichen Zeit T_{ges} zur Ruhe?

(c) Welche Werte ergeben sich für den Fall, daß das Elektron anfangs eine Frequenz von $\omega = 10^{16}/s$ (sichtbarer Bereich des Spektrums) besitzt und bei jedem Umlauf 1% seiner jeweils vorhandenen kinetischen Energie verliert?