UNIVERSITÄT PADERBORN
Die Universität der Informationsgesellschaft

Christian Thierfelder (Do)
Marcel Ruth (Mi)

Physik C – Geometrische Optik und Quantenmechanik
WS 2009/10
24.11.2009

Übungsblatt 7 - Mathematische Grundlagen

1. **δ-Distribution (3P)**

   Bestimmen Sie folgende Integrale:

   (a) $\int_{-\infty}^{\infty} \sin(t)\delta(t)dt$

   (b) $\int_{-\infty}^{\infty} 2\sin(2t)\delta(\frac{\pi t}{4})dt$

   (c) $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(at-b)dt$

2. **Fourier-Transformation (6P)**

   Die direkte und inverse Fourier-Transformation sind definiert durch

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k)e^{ikx}dk$$

   (a) Finde die Fourier-Transformierte von

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

   (b) Zeigen Sie

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{-ikx}dx = \delta(k)$$

   (Hinweis: Zeigen Sie, dass die folgende Eigenschaft der δ-Distribution erfüllt ist: $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x')\delta(x-x')dx'$)

   (c) Finden Sie die Fourier-Transformierte von x^n.

3. **Hermitizität von Matrizen (2P)**

   Eine Matrix A heißt hermitesch, wenn sie gleich ihrer adjungierten Matrix $A^\dagger = (A^T)^*$ (komplex konjugierte und transponierte Matrix zu A) ist.

   Überprüfen Sie folgende Matrizen auf Hermizität

(a)

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

4. **Hermitesche Operatoren (4P)**

Das Skalarprodukt $\langle f|g\rangle$ zweier Funktionen f und g sei gegeben durch

$$\langle f|g\rangle = \int f^*(x)g(x)dx.$$

Ein Operator $A^\dagger$ heißt zum Operator $\hat{A}$ adjungierter Operator, wenn gilt

$$\int (\hat{A}^\dagger f(x))^* g(x)dx = \int f^*(x)\hat{A}g(x)dx.$$

Ein Operator A heißt hermitesch wenn gilt $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$, d.h.

$$\int (\hat{A}f(x))^* g(x)dx = \int f^*(x)\hat{A}g(x)dx.$$

Überprüfen Sie folgende Operatoren auf Hermitizität:

(a) $\hat{a} = c$ (Multiplikation mit einer komplexen Zahl)

(b) $\hat{d} = \frac{d}{dx}$

(c) $\hat{p}_x = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$

(d) $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x)$