UNIVERSITÄT PADERBORN
Die Universität der Informationsgesellschaft

Christian Thierfelder (Do)
Marcel Ruth (Mi)

Physik C – Geometrische Optik und Quantenmechanik
WS 2009/10
05.01.2010

Übungsblatt 11
Harmonischer Oszillator

1. Die Schrödinger Gleichung des harmonischen Oszillators ist gegeben durch

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{2}x^2\right]\psi(x) = E\psi(x).$$

   Der nicht-hermitesche Operator $\hat{a}$ sei definiert durch

$$\hat{a} = \frac{\omega m\hat{x} + i\hat{p}}{\sqrt{2\omega m\hbar}}$$

   (a) Berechnen Sie $\hat{a}^\dagger$ und $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$.
   (b) Drücken Sie $\hat{x}$, $\hat{p}$ und $\hat{H}$ durch $\hat{a}^\dagger$ und $\hat{a}$ aus.

2. Berechnen Sie die Funktion $\psi_0(x)$, die gegeben sei durch

$$\hat{a}\psi_0(x) = 0$$

   und normieren Sie diese. Zeigen Sie, dass $\psi_0(x)$ eine Lösung der obigen Schrödinger Gleichung ist und berechnen Sie den zugehörigen Energieeigenwert.

3. Berechnen Sie die Funktionen

$$\psi_1 = \hat{a}^\dagger\psi_0$$
$$\psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}^\dagger)^2\psi_0$$
$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n\psi_0$$

   Zeigen Sie, dass auch diese Lösungen der Schrödinger Gleichung sind und berechnen Sie wiederum die zugehörigen Eigenwerte. Skizzieren Sie die Funktionen $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$ und $\psi_2(x)$. Skizzieren Sie die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten für $\psi_1(x)$ und $\psi_{10}(x)$ und vergleichen Sie diese mit den klassischen Aufenthaltswahrscheinlichkeiten der Bewegung eines Teilchen im analogen klassischen harmonischen Oszillator mit gleicher Energie.

4. Berechnen Sie das Unschärfeprodukt $\Delta x\Delta p$ für die Zustände ψ_0, ψ_1 und ψ_2.

5. Zeigen Sie, dass es sich bei

$$\phi_\alpha(x) = C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha \hat{a}^\dagger)^n}{n!} \psi_0(x)$$

um Eigenzustände des Operators $\hat{a}$ ($\hat{a}\phi_\alpha = \alpha\phi_\alpha$) handelt. Benutzen Sie die bekannte Zeitabhängigkeit der stationären Zustände, um die zeitabhängige Wellenfunktion $\phi_\alpha(x,t)$ zu finden. Berechnen Sie weiterhin den zeitabhängigen Ortsmittelwert von $\phi_\alpha(x,t)$, sowie $|\phi_\alpha(x,t)|^2$.

.