UNIVERSITÄT PADERBORN
Die Universität der Informationsgesellschaft

Christian Thierfelder (Do)
Marcel Ruth (Mi)

Physik C – Geometrische Optik und Quantenmechanik
WS 2009/10
15.12.2009

Übungsblatt 10
Axiomatische Formulierung

1. Die Verallgemeinerung der Exponentialfunktion für Operatoren ergibt

$$e^{\hat{A}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{A}^n}{n!}$$

Zeigen Sie, dass gilt

$$e^{\hat{A}} B e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \cdots$$

2. Es seinen $|\phi_n\rangle$ die Eigenzustände eines hermiteschen Operators H und es werde vorausgesetzt, dass diese Zustände eine diskrete orthonormierte Basis bilden. Der Operator $U(m,n)$ sei definiert durch

$$U(m,n) = |\phi_m\rangle\langle\phi_n|.$$

(a) Bestimmen Sie den zu $U(m,n)$ adjungierten Operator $U^\dagger(m,n)$

(b) Bestimmen Sie den Kommutator $[H, U(m,n)]$.

(c) Beweisen Sie die Beziehung

$$U(m,n)U^\dagger(p,q) = \delta_{nq} U(m,p)$$

(d) Berechnen Sie die Spur $\mathrm{Sp}\{U(m,n)\}$. (Die Spur eines beliebigen Operators A ist gegeben durch $\mathrm{Sp}\{A\} = \sum \langle\phi_i|A|\phi_i\rangle$.)

(e) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Sp}\{A\}$ invariant ist bei Basiswechsel. Zeigen Sie desweiteren $\mathrm{Sp}\{ABC\} = \mathrm{Sp}\{BCA\} = \mathrm{Sp}\{CAB\}$.

(f) Es sei A ein Operator mit dem Matrixelementen $A_{mn} = \langle\phi_m|A|\phi_n\rangle$. Man beweise die Beziehung

$$A = \sum_{m,n} A_{mn} U(m,n)$$

(g) Zeigen Sie, dass $A_{nm} = \mathrm{Sp}\{AU^\dagger(m,n)\}$.

3. Der Translationsoperator für eine endliche räumliche Verschiebung ist gegeben durch

$$T(\mathbf{a}) = \exp\left(-\frac{\mathbf{i}}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{a}\right)$$

   (a) Berechnen Sie $[\mathbf{x}, \mathbf{T}(\mathbf{a})]$.

   (b) Betrachten Sie den Erwartungswert $\langle|\mathbf{x}|\rangle$ bezüglich eines beliebigen Zustands $|\psi\rangle$ und zeigen Sie, wie sich der Erwartungswert bei einer Translation des Zustands $|\psi\rangle \to T(\mathbf{a})|\psi\rangle$ ändert.

4. Gegeben sei ein Teilchen der Masse m im Potential

$$V(x) = \frac{1}{2}Dx^2.$$

   (a) Zeigen Sie, dass

$$\psi_0 = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{1}{2}\alpha x^2}$$
$$\psi_1 = \left(\frac{4\alpha^3}{\pi}\right)^{1/4} x e^{-\frac{1}{2}\alpha x^2}$$

   mit $\alpha = mD/\hbar^2$ die beiden niedrigsten Eigenzustände diese Systems sind und berechnen Sie die Energieeigenwerte.

   (b) Berechnen Sie für beide Zustände die Erwartungswerte von x, p, x^2, p^2 und H.

.