UNIVERSITÄT PADERBORN
Die Universität der Informationsgesellschaft

Christian Thierfelder (Mo)
Marcel Ruth (Mi)

Physik C – Geometrische Optik und Quantenmechanik
WS 2009/10
13.10.2009

Übungsblatt 1 - Mathematische Grundlagen

1. **Mittelwert und Streuung von Messwerten (3P)**

   Das arithmetische Mittel $\overline{x}$ einer Gesamtheit von N Messwerten ist definiert über:

   $$\overline{x} = \sum_i w_i x_i \quad \text{mit } w_i = \frac{n_i}{N}$$

   n_i bezeichnet hierbei die absolute Häufigkeit, mit welcher der Messwert x_i auftaucht.

   (a) Die Abweichung eines Messwertes zum Mittelwert ist definiert über $\Delta x_i = x_i - \overline{x}$. Bestimmen Sie den Mittelwert der Abweichung (mittlere Abweichung) der Messwerte x_i zum Mittelwert $\overline{x}$.

   (b) Motivieren Sie aus dem erhaltenem Ergebnis die Definition der Varianz σ^2 und beweisen Sie das letzte Gleichheitszeichen.

   $$\sigma^2 = \sum_i w_i \left(x_i - \overline{x}\right)^2 \stackrel{!}{=} \overline{x^2} - \overline{x}^2$$

   (c) Um die Zuverlässigkeit einer Flaschenfüllanlage zu prüfen, werden stichprobenartig die Füllvolumina von 50 Flaschen gemessen. Das Ergebnis ist die folgende Verteilung:

511	485	479	515	513	503	523	487	504	499
495	497	489	498	501	516	484	503	501	482
504	511	503	502	496	498	518	504	481	489
523	498	503	484	512	501	508	498	503	497
497	510	493	503	491	499	513	497	505	474

   Bestimmen Sie den Mittelwert und die Varianz der Messung.

2. **Kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilung (3P)**

   Ein stochastisches Signal habe die Wahrscheinlichkeitsdichte (für $x \geq 0$, sonst $w(x) = 0$)

   $$w(x) = A \cdot \exp\left(-bx\right)$$

   (a) Bestimmen Sie die Normierungskonstante A.

(b) Bestimmen Sie den wahrscheinlichsten Wert.

(c) Berechnen Sie den Mittelwert und die Varianz.

Hinweis: Für eine kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilung geht im oberen Ausdruck für das arithmetische Mittel die Summe über in das Integral: $\overline{x} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} w(x)xdx$

3. **Normierung von Funktionen (2P)**

Für zwei Funktionen $\Psi(x)$ und $\Phi(x)$, die über dem reellen Intervall $[a, b]$ quadratintegrabel sind, ist ein Skalarprodukt der Form

$$(\Psi, \Phi) = (\Phi, \Psi)^* = \int_b^a \Psi^*(x)\,\Phi(x)\,dx$$

definiert. Zwei von Null verschiedene Funktionen $\Psi(x)$ und $\Phi(x)$ heißen orthogonal, wenn das Skalarprodukt zwischen ihnen verschwindet $\{(\Psi, \Phi) = 0\}$. Eine Funktion $\Psi(x)$ heißt normiert, wenn $(\Psi, \Psi) = 1$.
Gegeben seien nun die Funktionen $\Psi(x) = A\sin(x)$ und $\Phi(x) = B\sin(2x)$.

(a) Normieren sie die gegebenen Funktionen auf dem Intervall $[0, L]$.

(b) Bestimmen Sie das Skalarprodukt der beiden normierten Funktionen, sowie die Werte von L, für die die beiden Funktionen orthonormal (normiert + orthogonal) zueinander sind.

4. **Taylorreihen und komplexe Zahlen (2P)**

(a) Bestimmen die ausgehend von der Taylor-Entwicklung

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j$$

die Potenzreihendartellungen der Funktionen $\exp(x)$, $\sin(x)$ und $\cos(x)$.

(b) Beweisen Sie unter Voraussetzung der Gültigkeit der Reihenentwicklung der Exponentialfunktion e^z für komplexe Exponenten $z = iy$ $(y \in \mathbb{R})$ die Gültigkeit der Eulerschen Formel

$$e^{iy} = \cos(y) + i\sin(y)\ .$$

5. **Eigenwerte und Eigenvektoren (3P)**

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$.

Betrachten Sie die Matrixeigenwertgleichung $A\vec{\mathbf{a}} = \lambda\vec{\mathbf{a}}$. Die nichttriviale Lösbarkeit dieses Eigenwertproblems erfordert das verschwinden der Säkulardeterminante: $\det(A-\lambda I) = 0$.

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte λ durch Auswerten der Determinante $\det(A - \lambda I)$ und Auffinden der Nullstellen des sich ergebenden charakteristischen Polynoms.

(b) Bestimmen Sie zu jedem der Eigenwerte λ den zugehörigen Eigenvektor $\vec{\mathbf{a}}$, indem Sie die Eigenwerte nacheinander in die Eigenwertgleichung einsetzen und durch Lösung des Gleichungssystems die Komponenten a_1, a_2, a_3 des jeweiligen Eigenvektors bestimmen.

(c) Normieren Sie abschließend die einzelnen Eigenvektoren auf die Länge 1.