

Prof. Dr. W.G. Schmidt

Übungen zur Elektrodynamik, WS 2010/11

Blatt 14

Abgabetermin: 28.01.2011

1. Doppelbrechung

Elektromagnetische Wellen breiten sich in einem homogenen, anisotropen Medium aus. Das Medium wird charakterisiert durch den dielektrischen Tensor ϵ_{ij} mit den Eigenwerten ϵ_i (außerdem gilt: $\mu = 1$). Wählt man die Hauptachsen des Tensors als Koordinatenachsen, dann gilt $D_i = \epsilon_i E_i$ (für $i = 1, 2, 3$). Es handle sich um einen optisch einachsigen Kristall mit $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_o$ und $\epsilon_z = \epsilon_e$.

- (a) Zeigen Sie, dass ebene Wellen mit der Frequenz ω und dem Wellenvektor \vec{k} die folgende Gleichung erfüllen:

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) + \mu_0 \omega^2 \vec{D} = 0. \quad (1)$$

- (b) Zeigen Sie, dass für einen gegebenen Wellenvektor $\vec{k} = k\vec{n}$ (mit $\vec{n}^2 = 1$) zwei verschiedene Ausbreitungsmoden mit verschiedenen Phasengeschwindigkeiten $v = \omega/k$ existieren.

2. Isotropes Medium

Ein homogenes, isotropes Dielektrikum wird charakterisiert durch den komplexen Brechungsindex $n(\omega)$.

- (a) Zeigen Sie, dass sich die allgemeine Lösung für eindimensionale ebene Wellen wie folgt darstellen lässt:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega e^{-i\omega t} [A(\omega) e^{i(\omega/c)n(\omega)x} + B(\omega) e^{-i(\omega/c)n(\omega)x}], \quad (2)$$

wobei $u(x, t)$ eine Komponente des elektrischen Felds ist.

- (b) Zeigen Sie weiterhin: falls $u(x, t)$ reell ist, dann gilt $n(-\omega) = n^*(\omega)$.

3. Stromdurchflossener Draht

In einem unendlich langen und dünnen geraden Leiter werde zum Zeitpunkt $t = 0$ überall gleichzeitig der konstante Strom I_0 eingeschaltet: $\vec{j}(\vec{r}, t) = I_0 \Theta(t) \delta(x) \delta(y) \vec{e}_z$. Zeigen Sie, dass das retardierte Vektorpotential (Lorentz-Eichung) durch

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \Theta(ct - s) \operatorname{arcsinh}(\sqrt{(ct/s)^2 - 1}) \vec{e}_z \quad \text{mit } s = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3)$$

gegeben ist. Wie schränkt die Stufenfunktion die Integration ein? Bestimmen Sie aus $\vec{A}(\vec{r}, t)$ das Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r}, t)$. Was erhält man für $ct \gg s$?