Prof. Dr. W.G. Schmidt

Übungen zur Elektrodynamik, WS 2010/11

Blatt 7

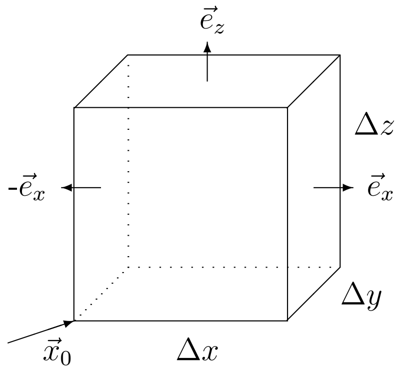
Abgabetermin: 26.11.2010

1. **Die leichte Aufgabe**

Der Gradient eines skalaren Feldes $\phi(\vec{x})$ kann definiert werden als

$$\nabla\phi = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\int_{\partial V}\phi(\vec{x})d\vec{A},$$

wobei ∂V die Oberfläche des Volumen V ist. Um zu zeigen, dass diese Definition äquivalent ist zur ihnen bekannten Rechenvorschrift $\left(\nabla\phi = \vec{e}_x\frac{\partial\phi}{\partial x} + \vec{e}_y\frac{\partial\phi}{\partial y} + \vec{e}_z\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$, betrachten wir einen infinitesimalen Quader am Punkt $\vec{x_0}$ (ausgerichtet entlang der kartesischen Achsen) mit den Kantenlängen Δx, Δy und Δz.



Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\int_{\partial V}\phi(\vec{x})d\vec{A} &\approx \lim_{V\to 0}\frac{1}{\Delta x\,\Delta y\,\Delta z}\left[\phi|_{x=x_0+\Delta x}\Delta y\,\Delta z\cdot\vec{e}_x + \phi|_{x=x_0}\Delta y\,\Delta z\cdot(-\vec{e}_x) + \ldots\right] \\ &= \lim_{V\to 0}\left[\frac{\phi|_{x=x_0+\Delta x} - \phi|_{x=x_0}}{\Delta x}\cdot\vec{e}_x + \ldots\right] \\ &= \left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_{x=x_0}\cdot\vec{e}_x + \left.\frac{\partial\phi}{\partial y}\right|_{y=y_0}\cdot\vec{e}_y + \left.\frac{\partial\phi}{\partial z}\right|_{z=z_0}\cdot\vec{e}_z.\end{aligned}$$

Zeigen Sie auf ähnliche Weise für die vektorwertige Funktion $\vec{E}(\vec{x})$

(a)

$$\nabla\cdot\vec{E} = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\int_{\partial V}\vec{E}(\vec{x})\cdot d\vec{A},$$

(b)

$$\nabla\times\vec{E} = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\int_{\partial V}\vec{E}(\vec{x})\times d\vec{A}.$$

2. **Die simple Aufgabe**

   (a) Zerlegen Sie das Volumen V in infinitesimal kleine Quader V_i. Zeigen Sie nun den Satz von Gauss, indem Sie nun, unter Beachtung der Orientierung der einzelnen Quaderflächen, folgenden Ausdruck berechnen

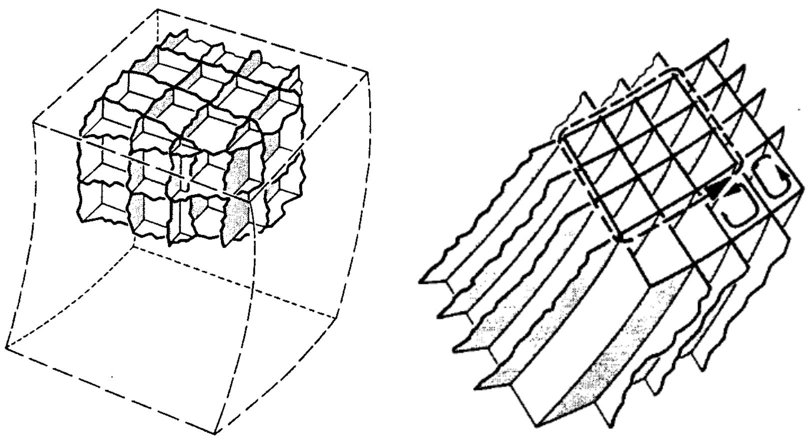
   $$\int_V (\nabla \cdot \vec{E}) d^3\vec{r} \approx \lim_{\max V \to 0} \sum_i \left(\frac{1}{V_i} \int_{\partial V_i} \vec{E}(\vec{x}) \cdot d\vec{A} \right) V_i .$$

   (b) Betrachten Sie nun ein infinitesimales Rechteck mit dem Rand ∂F und den Kantenlängen Δx und Δy. Entwickeln Sie nun die Komponenten des Vektorfelds $E_i(x,y)$ für$(i = x, y)$ in einer Taylorreihe bis zur ersten Ordnung und zeigen Sie

   $$\int_{\partial F} \vec{E} \cdot d\vec{s} \approx (\nabla \times \vec{E}) \Delta x \, \Delta y \, \vec{e}_z$$

   (c) Zerlegen Sie nun eine beliebig gekrümmte Fläche A in infinitesimal kleine Rechtecke A_i. Zeigen Sie nun den Satz von Stokes, indem Sie nun, unter Beachtung der Orientierung der einzelnen Rechteckflächen, folgenden Ausdruck berechnen

   $$\int_A \left(\nabla \times \vec{E} \right) \cdot d\vec{A} \approx \lim_{\max A \to 0} \sum_i \left(\nabla \times \vec{E} \right) \cdot \vec{A}_i$$



3. **Die einfache Aufgabe**

   Bekannterweise ist die Diracsche $\delta-$Funktion definiert durch

   $$\int_V \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) d^3\vec{r} = \begin{cases} 1 & \vec{r}_0 \in V \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   und

   $$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = 0 \quad \forall \, \vec{r} \neq \vec{r}_0 .$$

Sie sollen nun zeigen, dass

$$\Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} = -\frac{1}{4\pi} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0).$$

Dazu führen sie folgende Schritte aus

(a) Berechnen Sie für $\forall\, x \neq x_0$

$$\frac{d^2}{dx^2} \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}.$$

(b) Berechnen Sie für $\forall\, \vec{r} \neq \vec{r}_0$ den Ausdruck

$$\Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}.$$

(c) Berechnen Sie nun

$$\int_V \Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} d^3\vec{r}.$$

Untersuchen Sie dazu die Fälle $\vec{r} \notin \vec{r}_0$ und $\vec{r} \in \vec{r}_0$ getrennt. Im letzteren Fall ist es evtl. angebracht (warum?) V durch eine um $\vec{r}_0$ zentrierte Kugel mit Radius R zu ersetzen und den Satz von Gauss (da $\triangle = \text{div grad}$) anzuwenden.