Prof. Dr. W.G. Schmidt

Übungen zur Elektrodynamik, WS 2010/11

Blatt 1

Abgabetermin: 15.10.2010

1. **Levi-Civita Symbol**

   Das Levi-Civita-Symbol hat in drei Dimensionen drei Indizes wird durch folgende Eigenschaften definiert:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{falls } i, j, k \text{ gerade Permutation von 1, 2, 3;} \\ -1 & \text{falls } i, j, k \text{ ungerade Permutation von 1, 2, 3;} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

   Zeigen Sie (*Summenkonvention: über doppelt auftretende Indizes wird summiert!*):

   (a) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i, \qquad (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k, \qquad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k$

   (b) $\det A = \varepsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k}$

   (c) $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}$

   (d) $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijn} = 2\delta_{kn}$

   (e) $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} = 6$

2. **Vektoranalysis**

   (a) Beweisen Sie für die Vektorfelder $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und das skalare Feld ψ folgende Identitäten:

$$\begin{aligned}
&\nabla \times \nabla\psi = 0 \\
&\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = 0 \\
&\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a} \\
&\nabla \cdot (\psi \mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \nabla\psi + \psi \nabla \cdot \mathbf{a} \\
&\nabla \times (\psi \mathbf{a}) = \nabla\psi \times \mathbf{a} + \psi \nabla \times \mathbf{a} \\
&\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a})
\end{aligned}$$

   (b) Zeigen Sie für den Ortsvektor $\mathbf{x}$ mit $r = |\mathbf{x}|$ und $\mathbf{n} = \mathbf{x}/r$ folgende Relationen

$$\begin{aligned}
&\nabla \cdot \mathbf{x} = 3 \\
&\nabla \times \mathbf{x} = 0 \\
&\nabla \cdot [\mathbf{n} f(r)] = \frac{2}{r} f(r) + \frac{\partial f}{\partial r} \\
&\nabla \times [\mathbf{n} f(r)] = 0
\end{aligned}$$

Hinweis: Es könnte sich als sinnvoll erweisen Ergebnisse aus Aufgabe 1 zu benutzen

3. **Dirac'sche Delta-"Funktion"**

Die Dirac'sche δ-Funktion (genauer: Distribution) ist definiert durch

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0) \qquad (f(x) \text{ stetig in der Umgebung um } 0)$$

(a) Zeigen Sie, dass folgende Funktionenfolge

$$\delta_a(x) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-x^2/a^2}$$

im Limes $\lim_{a\to 0} \delta_a(x) \to \delta(x)$ obige Eigenschaft erfüllt (sie können davon ausgehen, dass Limes und Integral vertauscht werden dürfen).

(b) Beweisen Sie die folgenden Relationen:

i. $\delta(bx) = \frac{1}{|b|}\delta(x)$

ii. $\delta(x^2 - b^2) = \frac{1}{2|b|}[\delta(x+b) + \delta(x-b)]$

iii. $\lim_{a\to 0} \int f(x)\frac{d}{dx}\delta_a(x)dx = -f'(0)$

iv. $\delta(x) = \int \frac{1}{2\pi} e^{-ikx} dk$

(c) Zeigen Sie, dass in drei Dimensionen $\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ in kartesischen Koordinaten $\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)$ entspricht! Wie muss der Ausdruck in Kugelkoordinaten abgeändert werden?