Department Physik
Universität Paderborn

Paderborn, den 30. Januar 2017

Übungen zur Vorlesung

Theoretische Physik B: Elektrodynamik (WS 2016/2017)

Blatt XIV

37. **Eichungen**
Fassen Sie in eigenen Worten zusammen, was man unter Coulomb- und Lorenz-Eichung versteht.

38. **Anwendung des Residuensatzes**
Diese Aufgabe soll gemeinsam in der Übung bearbeitet und besprochen werden, darf aber natürlich gern wie gewohnt vorbereitet und abgegeben werden!
Zur allgemeinen Lösung der Wellengleichung wurde in der Vorlesung die Greensche Funktion G durch die Bestimmungsgleichung

$$\Box G(\vec{r}-\vec{r}', t-t') = \delta(\vec{r}-\vec{r}')\delta(t-t') \tag{1}$$

definiert. Mittels Fourier-Transformation ließ sich diese Gleichung leicht lösen und wir hatten mit der Definition $\omega_0 = ck$

$$\tilde{G}(\vec{k},\omega) = \frac{c^2}{4\pi^2}\frac{1}{\omega^2-\omega_0^2} \tag{2}$$

gefunden. Führen Sie nun explizit die Fourier-Rücktransformation

$$G(\vec{r}-\vec{r}', t-t') = \frac{1}{(2\pi)^2}\int \mathrm{d}^3k\,\mathrm{d}\omega\;\tilde{G}(\vec{k},\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-t')}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')} \tag{3}$$

aus, um die Lösung von Gl. (1),

$$G(\vec{r}-\vec{r}', t-t') = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\delta\left(\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}-t+t'\right), \tag{4}$$

zu erhalten. Dazu sind folgende Hilfsschritte nützlich:

a) Wo liegen die Pole von $\tilde{G}$?

b) Begründen Sie, warum wir im Folgenden $\tau = t-t' > 0$ annehmen.

c) Erweitern Sie nun die in Gl. (3) auftretende ω-Integration, $\Omega(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}}{\omega^2-\omega_0^2}$, in die komplexe Ebene (Residuensatz!). Warum muss der halbkreisförmige Integrationsweg hier in der unteren Halbebene geschlossen werden? Kontrollergebnis: $\Omega(\tau) = \frac{\pi\mathrm{i}}{\omega_0}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0\tau}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0\tau}\right)$.

d) Die nun noch ausstehende $\vec{k}$-Integration lässt sich in Kugelkoordinaten ausdrücken, indem $\vec{\rho} = \vec{r}-\vec{r}'$ mit der Polachse identifiziert wird.

e) Nach Ausführen der Winkelintegration kann die k-Integration (zunächst $k \geq 0$) auf die gesamte reelle Achse ($-\infty < k < \infty$) umformuliert werden und Sie erhalten (endlich!) Gl. (4).