Department Physik
Universität Paderborn

Paderborn, den 14. November 2016

Übungen zur Vorlesung

Theoretische Physik B: Elektrodynamik (WS2016/2017)

BLATT V

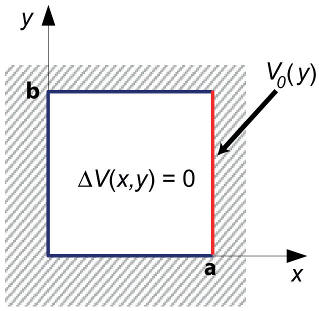
1. **Randwertprobleme**
Fassen Sie das Kapitel *Randwertprobleme* der Vorlesung in Ihren eigenen Worten zusammen. Sie können sich dabei von folgenden Fragen leiten lassen:
   - Warum ist das bisherige Poisson-Integral (die formale Lösung der Poisson-Gleichung) nicht die vollständige Lösung des elektrostatischen Problems bzw. wie sieht die vollständige Lösung aus?
   - Welche Arten von Randbedingungen gibt es?
   - Was ist die Greensche Funktion?
   - Wie funktioniert die Methode der Bildladungen?

2. **Laplace-Randwertproblem**
Gegeben sei folgendes, zweidimensionales Laplace-Randwertproblem: Im Gebiet $0 < x < a, 0 < y < b$ erfülle die gesuchte Funktion $V(x, y)$ die Laplace-Gleichung

$$\Delta V(x, y) = 0.$$

Auf dem Rand des Gebietes werden folgende Randbedingungen gefordert:

$$\text{Randbedingungen:} \begin{cases} V(x,0) = 0 \\ V(0,y) = 0 \\ V(x,b) = 0 \\ V(a,y) = V_0(y) \end{cases}$$



   a) Um die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

   zu lösen, machen Sie zunächst einen **Separationsansatz** $V(x, y) = X(x)Y(y)$. Dadurch wird die partielle Differentialgleichung in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen (d.h. eine für $X(x)$ und eine für $Y(y)$) umgewandelt.

   b) Nachdem Sie die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen allgemein gelöst haben, müssen die Lösungen eingeschränkt werden, um den **ersten drei** Randbedingungen zu genügen. Zeigen Sie, dass sich folgender Satz von Lösungsfunktionen ergibt:

$$V_n(x, y) = c_n \sinh\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \; n \in \mathbb{N}$$

   c) Die endgültige Lösung des Problems, welche auch die **vierte** Randbedingung erfüllt, muss aus diesen V_n linearkombiniert werden:

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(x, y)$$

Bestimmen Sie mit Hilfe der Orthogonalitätsrelation der Sinusfunktionen

$$\int_0^b \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)dy = \frac{b}{2}\delta_{nm},$$

den allgemeinen Ausdruck für die Koeffizienten der Linearkombination.

Kontrollergebnis:

$$c_m = \frac{2}{b\sinh(\frac{m\pi}{b}a)}\int_0^b V_0(y)\sin(\frac{m\pi}{b}y)dy$$

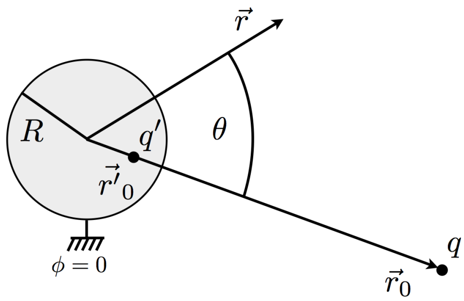
d) Berechnen Sie die Koeffizienten für die folgenden Potentiale:

i. $V_0(y) = \sin(\frac{\pi}{b}y)$

ii. $V_0(y) = V_0$

Gibt es im zweiten Fall, also für einen konstanten Wert auf dem Rand, Koeffizienten, die immer 0 sind?

3. **Methode der Bildladungen**
Es sei eine leitende Kugel vom Radius R gegeben. Diese Kugel liege auf Erdpotential ($\phi = 0$). Im Abstand r_0 vom Mittelpunkt der Kugel befinde sich eine Punktladung mit Ladung q.



Bestimme Sie das Potential $\phi(\vec{r})$ außerhalb der Kugel mit der Methode der Bildladungen! Geben Sie die Greensche Funktion $G(\vec{r}, \vec{r}')$ für dieses System an.