Preis der Anarchie für Auslastungsspiele mit polynomiellen Latenzfunktionen

Diplomarbeit

Florian Schoppmann

Betreuer: MSc/Dipl.-Ing. Martin Gairing

Fachgruppe Effiziente Nutzung paralleler Systeme
Prof. Dr. Burkhard Monien

Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik
Universität Paderborn

13. Dezember 2005

Motivation

Große Kommunikations- oder Verkehrsnetze:

- Ziel: Hohe „Netzwerk-Performanz“
- Abhängig von Auslastung
  - Beispiel Ferienverkehr
- Dezentrale Netze
  - Zentrale Regulierung z. T. ohnehin unmöglich
  - Autonome Agenten → überschaubare Teilprobleme
- Anwendungen: Verkehr, Internet, allgemeine Logistiksysteme

Intuitiv: Eigennützigkeit i. A. nicht systemoptimal

Fragen:

- Vorhersagen → Spieltheorie: Nash-Equilibrien
- Quantifizierung des Verlustes → „Preis der Anarchie“

Motivation

Große Kommunikations- oder Verkehrsnetze:

- Ziel: Hohe „Netzwerk-Performanz"
- Abhängig von Auslastung
  - Beispiel Ferienverkehr
- Dezentrale Netze
  - Zentrale Regulierung z. T. ohnehin unmöglich
  - Autonome Agenten → überschaubare Teilprobleme
- Anwendungen: Verkehr, Internet, allgemeine Logistiksysteme

Intuitiv: Eigennützigkeit i. A. nicht systemoptimal

Fragen:

- Vorhersagen → Spieltheorie: Nash-Equilibrien
- Quantifizierung des Verlustes → „Preis der Anarchie"

Gliederung

Verhalten unter gegenseitigen Abhängigkeiten
- Spiele in strategischer Form
- Notation

Nash-Equilibrien
- Rein/Gemischt
- Existenz von Nash-Equilibrien

Eigennütziges Routing
- Auslastungsspiele
- Sozialer Nutzen

Preis der Anarchie
- „Coordination Ratio“
- Ungewichtete Auslastungsspiele
- Gewichtete Auslastungsspiele

Spiele in strategischer Form

Definition (endliches Spiel Γ in strategischer Form)

$\Gamma = (n, (S_i)_{i=1}^n, (u_i)_{i=1}^n)$ wobei

- $n \in \mathbb{N}$ Anzahl Spieler,
- $S_i \neq \emptyset$ endliche Menge (reiner) Strategien
- $u_i : \times_{k=1}^n S_k \to \mathbb{R}$ ist Nutzenfunktion von Spieler i.

Ein $\mathfrak{s} := (s_i)_{i=1}^n \in S := \times_{i=1}^n S_i$ heißt (reines) Strategieprofil.

Standardbeispiel Gefangenendilemma:

- $n = 2$ Spieler (Gefangene), $S_1 = S_2 = \{\text{leugnen}, \text{gestehen}\}$
- $u(\mathfrak{s}) := (u_1(\mathfrak{s}), u_2(\mathfrak{s}))$

	leugnen	gestehen
leugnen	$(-1, -1)$	$(-5, 0)$
gestehen	$(0, -5)$	$(-4, -4)$

Spiele in strategischer Form

Definition (endliches Spiel Γ in strategischer Form)

$\Gamma = (n, (S_i)_{i=1}^n, (u_i)_{i=1}^n)$ wobei

- $n \in \mathbb{N}$ Anzahl Spieler,
- $S_i \neq \emptyset$ endliche Menge (reiner) Strategien
- $u_i : \times_{k=1}^n S_k \to \mathbb{R}$ ist Nutzenfunktion von Spieler i.

Ein $\mathfrak{s} := (s_i)_{i=1}^n \in S := \times_{i=1}^n S_i$ heißt (reines) Strategieprofil.

Standardbeispiel Gefangenendilemma:

- $n = 2$ Spieler (Gefangene), $S_1 = S_2 = \{\text{leugnen}, \text{gestehen}\}$
-

$u(\mathfrak{s}) := (u_1(\mathfrak{s}), u_2(\mathfrak{s}))$	leugnen	gestehen
leugnen	$(-1, -1)$	$(-5, 0)$
gestehen	$(0, -5)$	$(-4, -4)$

Gemischte Strategien und Notation

Spieler können auch randomisieren:

- Spieler i wählt (unabhängig) gemischte Strategie σ_i aus $\Delta(S_i)$
  $\Longrightarrow$ eindeutige gemeinsame Verteilung $\mathfrak{S} \in \Delta(S)$
- $\Delta_{\perp\!\!\!\perp}(S) \subseteq \Delta(S)$ seien komponentenweise stochastisch unabhängig
- Verteilungen aus $\Delta_{\perp\!\!\!\perp}(S)$ und gemischte Strategieprofile aus $\times_{i=1}^{n} \Delta(S_i)$ eindeutig identifizierbar: $\mathfrak{S} = (\sigma_i)_{i=1}^{n}$
- $u_i(\mathfrak{S}) := \mathrm{E}_{\mathfrak{S}}[u_i(T)]$, wobei T eine S-wertige Zufallsvariable

Notation, $\mathfrak{S} \in \Delta_{\perp\!\!\!\perp}(S)$, $\mathfrak{s} \in S$, $\tau_i \in \Delta(S_i)$:

- $\mathfrak{S}(\mathfrak{s})$ ist W'keit, dass $\mathfrak{s}$ bei gemischtem Profil $\mathfrak{S}$ gespielt wird
- $(\mathfrak{S}_{-i}, \tau_i) := (\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \tau_i, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n) \in \Delta_{\perp\!\!\!\perp}(S)$

Gliederung

Nash-Equilibrium

Spieltheorie: Vorhersagen, falls Spieler rational und intelligent

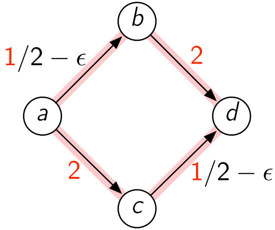
Beispiel Braess' Paradoxon:

- $n = 2$ Spieler
- $S_1 = S_2 = \{\text{oben}, \text{unten}\}$
- $u_i(\mathfrak{s}) = -1 \cdot$ Reisezeit für i bei $\mathfrak{s}$

$\Longrightarrow u(\text{oben}, \text{unten}) = (-3, -3)$

$u(\text{oben}, \text{mitte}) = (\epsilon - 4, \epsilon - 3)$

$u(\text{mitte}, \text{mitte}) = (2\epsilon - 4, 2\epsilon - 4)$



Definition (Nash-Equilibrium)

Ein Strategieprofil $\mathfrak{S} \in \Delta_{\perp\!\!\!\perp}(S)$ heißt (gemischtes/reines) Nash-Equilibrium, wenn $u_i(\mathfrak{S}) \geq u_i(\mathfrak{S}_{-i}, \sigma'_i)$ für alle $i \in [n]$ und alle (gemischten/reinen) $\sigma'_i \in \Delta(S_i)$.

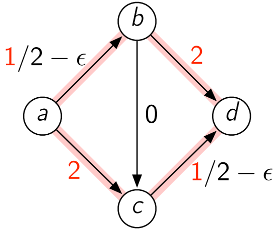
Nash-Equilibrium

Spieltheorie: Vorhersagen, falls Spieler rational und intelligent

Beispiel Braess' Paradoxon:

- $n = 2$ Spieler
- $S_1 = S_2 = \{\text{oben}, \text{mitte}, \text{unten}\}$
- $u_i(\mathfrak{s}) = -1 \cdot$ Reisezeit für i bei $\mathfrak{s}$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow u(\text{oben}, \text{unten}) &= (-3, -3) \\ u(\text{oben}, \text{mitte}) &= (\epsilon - 4, \epsilon - 3) \\ u(\text{mitte}, \text{mitte}) &= (2\epsilon - 4, 2\epsilon - 4) \end{aligned}$$



Definition (Nash-Equilibrium)

Ein Strategieprofil $\mathfrak{S} \in \Delta_{\perp\!\!\!\perp}(S)$ heißt (gemischtes/reines) Nash-Equilibrium, wenn $u_i(\mathfrak{S}) \geq u_i(\mathfrak{S}_{-i}, \sigma_i')$ für alle $i \in [n]$ und alle (gemischten/reinen) $\sigma_i' \in \Delta(S_i)$.

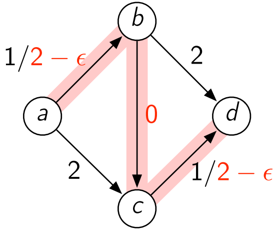
Nash-Equilibrium

Spieltheorie: Vorhersagen, falls Spieler rational und intelligent

Beispiel Braess' Paradoxon:

- $n = 2$ Spieler
- $S_1 = S_2 = \{\text{oben}, \text{mitte}, \text{unten}\}$
- $u_i(\mathfrak{s}) = -1 \cdot$ Reisezeit für i bei $\mathfrak{s}$

$$\Longrightarrow u(\text{oben}, \text{unten}) = (-3, -3)$$
$$u(\text{oben}, \text{mitte}) = (\epsilon - 4, \epsilon - 3)$$
$$u(\text{mitte}, \text{mitte}) = (2\epsilon - 4, 2\epsilon - 4)$$



Definition (Nash-Equilibrium)

Ein Strategieprofil $\mathfrak{S} \in \Delta_{\perp\!\!\!\perp}(S)$ heißt (gemischtes/reines) Nash-Equilibrium, wenn $u_i(\mathfrak{S}) \geq u_i(\mathfrak{S}_{-i}, \sigma_i')$ für alle $i \in [n]$ und alle (gemischten/reinen) $\sigma_i' \in \Delta(S_i)$.

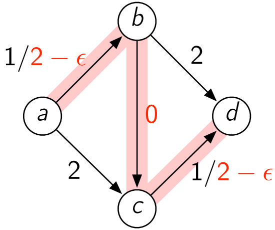
Nash-Equilibrium

Spieltheorie: Vorhersagen, falls Spieler rational und intelligent

Beispiel Braess' Paradoxon:

- $n = 2$ Spieler
- $S_1 = S_2 = \{\text{oben}, \text{mitte}, \text{unten}\}$
- $u_i(\mathfrak{s}) = -1 \cdot$ Reisezeit für i bei $\mathfrak{s}$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow\ & u(\text{oben}, \text{unten}) = (-3, -3) \\ & u(\text{oben}, \text{mitte}) = (\epsilon - 4, \epsilon - 3) \\ & u(\text{mitte}, \text{mitte}) = (2\epsilon - 4, 2\epsilon - 4) \end{aligned}$$



Definition (Nash-Equilibrium)

Ein Strategieprofil $\mathfrak{S} \in \Delta_{\perp\!\!\!\perp}(S)$ heißt (gemischtes/reines) Nash-Equilibrium, wenn $u_i(\mathfrak{S}) \geq u_i(\mathfrak{S}_{-i}, \sigma'_i)$ für alle $i \in [n]$ und alle (gemischten/reinen) $\sigma'_i \in \Delta(S_i)$.

Existenz von Nash-Equilibrien

Satz (Nash, 1950)

Jedes endliche Spiel $\Gamma = (n, (S_i)_{i=1}^n, (u_i)_{i=1}^n)$ *hat ein gemischtes Nash-Equilibrium.*

Beweisidee.

- Stetiges $T : \Delta_{\perp\!\!\!\perp}(S) \to \Delta_{\perp\!\!\!\perp}(S)$ mit $T(\mathfrak{S}) = \mathfrak{S} \Longleftrightarrow \mathfrak{S}$ NE
- Brouwer'scher Fixpunktsatz $\Longrightarrow$ Ein solches $\mathfrak{S}$ existiert

Aber: Ein reines NE muss nicht existieren.

Definition (Exakte Potentialfunktion)

Eine Funktion $h : S \to \mathbb{R}$ heißt exakte Potentialfunktion von Γ, wenn für alle $i \in [n]$, $\mathfrak{s} \in S$, $s_i' \in S_i$:

$$h(\mathfrak{s}) - h(\mathfrak{s}_{-i}, s_i') = u_i(\mathfrak{s}) - u_i(\mathfrak{s}_{-i}, s_i').$$

Existenz von Nash-Equilibrien

Satz (Nash, 1950)

Jedes endliche Spiel $\Gamma = (n, (S_i)_{i=1}^n, (u_i)_{i=1}^n)$ *hat ein gemischtes Nash-Equilibrium.*

Beweisidee.

- Stetiges $T : \Delta_{\mathbb{1}}(S) \to \Delta_{\mathbb{1}}(S)$ mit $T(\mathfrak{S}) = \mathfrak{S} \iff \mathfrak{S}$ NE
- Brouwer'scher Fixpunktsatz $\implies$ Ein solches $\mathfrak{S}$ existiert

Aber: Ein reines NE muss nicht existieren.

Definition (Exakte Potentialfunktion)

Eine Funktion $h : S \to \mathbb{R}$ heißt exakte Potentialfunktion von Γ, wenn für alle $i \in [n]$, $\mathfrak{s} \in S$, $s_i' \in S_i$:

$$h(\mathfrak{s}) - h(\mathfrak{s}_{-i}, s_i') = u_i(\mathfrak{s}) - u_i(\mathfrak{s}_{-i}, s_i').$$

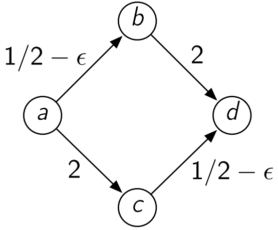
Gliederung

Auslastungsspiele

Definition (Auslastungsspiel Γ)

$\Gamma = (n, (w_i)_{i=1}^n, E, (f_e)_{e \in E}, (S_i)_{i=1}^n)$

- $n \in \mathbb{N}$ Anzahl Spieler
- w_i Gewicht von Spieler i
- E endliche Menge von Ressourcen
- $f_e : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ Latenzfunktion
- $S_i \subseteq \mathcal{P}(E)$ Menge von Strategien für Spieler i



$$n = 2$$

$$w_1 = w_2 = 1$$

$$f_{(a,b)}(x) = (1 - \epsilon)x + \epsilon$$

$$\vdots$$

Last auf einer Ressource:

$$l_e(\mathfrak{s}) := \sum_{i \in [n] | s_i \ni e} w_k$$

Private Kosten (negat. Nutzen):

$$\mathrm{PC}_i(\mathfrak{s}) := \sum_{e \in s_i} f_e(l_e(\mathfrak{s}))$$

Eigenschaften von Auslastungsspielen

Satz (Rosenthal, 1973)

Jedes ungewichtete Auslastungsspiel hat ein reines NE.

Beweisskizze. $h : S \to \mathbb{R}$,

$$h(\mathfrak{s}) := -\sum_{e \in E} \sum_{k=1}^{l_e(\mathfrak{s})} f_e(k)$$

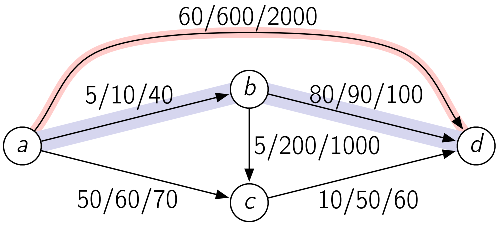
ist exakte Potentialfunktion. $\square$

Weitere Charakterisierung:

- Jedes Spiel mit exakter Potenzialfunktion isomorph zu einem (ungewichteten) Auslastungsspiel (Monderer & Shapley, 1996)
- Isomorph: Strategien so nummerierbar, dass beide Spiele identische Nutzenmatrix haben

Eigenschaften von gewichteten Auslastungsspielen

Im Allgemeinen kein reines NE (Libman & Orda, 2001):

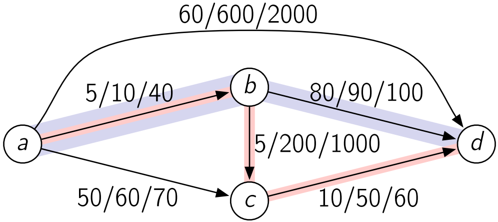


	p_1	p_2	p_3	p_4
p_1	$(2000, 2000)$	$(600, 85)$	$(600, 60)$	$(600, 20)$
p_2	$(\mathbf{100}, \mathbf{60})$	$(140, 140)$	$(100, 60)$	$(\mathbf{130}, \mathbf{55})$
p_3	$(\mathbf{110}, \mathbf{60})$	$(110, 85)$	$(130, 130)$	$(\mathbf{120}, \mathbf{70})$
p_4	$(260, 60)$	$(290, 120)$	$(270, 110)$	$(1100, 1100)$

Ein reines NE existiert aber, wenn Kostenfunktionen linear (Fotakis *et al.*, 2005).

Eigenschaften von gewichteten Auslastungsspielen

Im Allgemeinen kein reines NE (Libman & Orda, 2001):

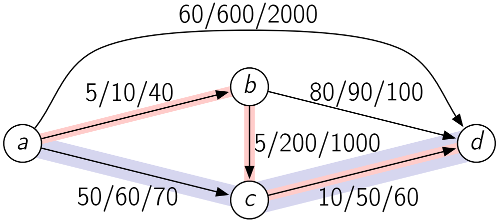


	p_1	p_2	p_3	p_4
p_1	$(2000, 2000)$	$(600, 85)$	$(600, 60)$	$(600, 20)$
p_2	$(\mathbf{100}, \mathbf{60})$	$(140, 140)$	$(100, 60)$	$(\mathbf{130}, \mathbf{55})$
p_3	$(\mathbf{110}, \mathbf{60})$	$(110, 85)$	$(130, 130)$	$(\mathbf{120}, \mathbf{70})$
p_4	$(260, 60)$	$(290, 120)$	$(270, 110)$	$(1100, 1100)$

Ein reines NE existiert aber, wenn Kostenfunktionen linear (Fotakis *et al.*, 2005).

Eigenschaften von gewichteten Auslastungsspielen

Im Allgemeinen kein reines NE (Libman & Orda, 2001):

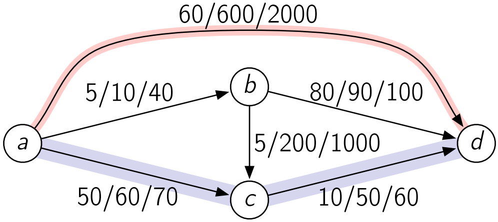


	p_1	p_2	p_3	p_4
p_1	$(2000, 2000)$	$(600, 85)$	$(600, 60)$	$(600, 20)$
p_2	$(\mathbf{100}, \mathbf{60})$	$(140, 140)$	$(100, 60)$	$(\mathbf{130}, \mathbf{55})$
p_3	$(\mathbf{110}, \mathbf{60})$	$(110, 85)$	$(130, 130)$	$(\mathbf{120}, \mathbf{70})$
p_4	$(260, 60)$	$(290, 120)$	$(270, 110)$	$(1100, 1100)$

Ein reines NE existiert aber, wenn Kostenfunktionen linear (Fotakis *et al.*, 2005).

Eigenschaften von gewichteten Auslastungsspielen

Im Allgemeinen kein reines NE (Libman & Orda, 2001):

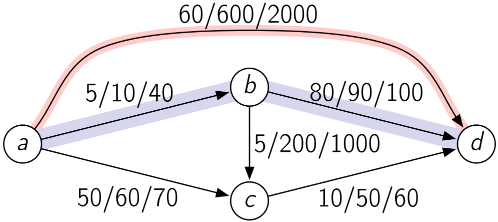


	p_1	p_2	p_3	p_4
p_1	$(2000, 2000)$	$(600, 85)$	$(600, 60)$	$(600, 20)$
p_2	$(\mathbf{100}, \mathbf{60})$	$(140, 140)$	$(100, 60)$	$(\mathbf{130}, \mathbf{55})$
p_3	$(\mathbf{110}, \mathbf{60})$	$(110, 85)$	$(130, 130)$	$(\mathbf{120}, \mathbf{70})$
p_4	$(260, 60)$	$(290, 120)$	$(270, 110)$	$(1100, 1100)$

Ein reines NE existiert aber, wenn Kostenfunktionen linear (Fotakis *et al.*, 2005).

Eigenschaften von gewichteten Auslastungsspielen

Im Allgemeinen kein reines NE (Libman & Orda, 2001):



	p_1	p_2	p_3	p_4
p_1	$(2000, 2000)$	$(600, 85)$	$(600, 60)$	$(600, 20)$
p_2	$(\mathbf{100}, \mathbf{60})$	$(140, 140)$	$(100, 60)$	$(\mathbf{130}, \mathbf{55})$
p_3	$(\mathbf{110}, \mathbf{60})$	$(110, 85)$	$(130, 130)$	$(\mathbf{120}, \mathbf{70})$
p_4	$(260, 60)$	$(290, 120)$	$(270, 110)$	$(1100, 1100)$

Ein reines NE existiert aber, wenn Kostenfunktionen linear (Fotakis *et al.*, 2005).

Sozialer Nutzen

Definition (Soziale Kosten, SC)

Sei $\mathfrak{s} \in S$ ein reines Strategieprofil. Die sozialen Kosten sind dann die (gewichteten) Gesamtkosten (bzw. die Gesamtlatenz),

$$\mathrm{SC}^{\Gamma}(\mathfrak{s}) := \sum_{e \in E} l_e(\mathfrak{s}) \cdot f_e(l_e(\mathfrak{s})).$$

Das Systemoptimum bezeichnet die minimalen sozialen Kosten $\mathrm{OPT}^{\Gamma} := \min_{\mathfrak{s} \in S} \mathrm{SC}(\mathfrak{s})$.

Andere Darstellung:

$$\mathrm{SC}(\mathfrak{s}) = \sum_{e \in E} l_e(\mathfrak{s}) \cdot f_e(l_e(\mathfrak{s})) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{e \in s_i} w_i \cdot f_e(l_e(\mathfrak{s})) = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot \mathrm{PC}_i(\mathfrak{s})$$

Gemischte $S \in \Delta_{\perp\!\!\!\perp}(S)$: $\mathrm{SC}(\mathfrak{S}) := \sum_{\mathfrak{s} \in S} \mathfrak{S}(\mathfrak{s}) \cdot \mathrm{SC}(\mathfrak{s})$

Gliederung

Preis der Anarchie (Coordination Ratio)

Definition (Gemischter Preis der Anarchie, PoA)

Sei $\mathcal{G}$ Klasse von Spielen. Dann:

$$\mathrm{PoA}(\mathcal{G}) := \sup_{\substack{\Gamma \in \mathcal{G} \\ \mathfrak{S} \text{ is NE in } \Gamma}} \frac{\mathrm{SC}^{\Gamma}(\mathfrak{S})}{\mathrm{OPT}^{\Gamma}}$$

$\mathfrak{P}_d := \{f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \mid f(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i \text{ und alle } a_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$

Christodoulou & Koutsoupias, 2005 und Awerbuch *et. al.*, 2005:
Sei $\mathcal{G}$ (bzw. $\mathcal{H}$) Menge der ungewichteten (gewichteten) Auslastungsspiele mit Latenzen aus $\mathfrak{P}_1$. Dann:

$$\mathrm{PoA}(\mathcal{G}) = \frac{5}{2} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{PoA}(\mathcal{H}) = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Sebastian Aland, Dominic Dumrauf, Martin Gairing, Burkhard Monien, Florian Schoppmann: „Exact Price of Anarchy for Polynomial Congestion Games“ (Proc. STACS 2006)

Preis der Anarchie (Coordination Ratio)

Definition (Gemischter Preis der Anarchie, PoA)

Sei $\mathcal{G}$ Klasse von Spielen. Dann:

$$\mathrm{PoA}(\mathcal{G}) := \sup_{\substack{\Gamma \in \mathcal{G} \\ \mathfrak{S} \text{ is NE in } \Gamma}} \frac{\mathrm{SC}^{\Gamma}(\mathfrak{S})}{\mathrm{OPT}^{\Gamma}}$$

$\mathfrak{P}_d := \{f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \mid f(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$ und alle $a_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$

Christodoulou & Koutsoupias, 2005 und Awerbuch *et. al.*, 2005:
Sei $\mathcal{G}$ (bzw. $\mathcal{H}$) Menge der ungewichteten (gewichteten) Auslastungsspiele mit Latenzen aus $\mathfrak{P}_1$. Dann:

$$\mathrm{PoA}(\mathcal{G}) = \frac{5}{2} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{PoA}(\mathcal{H}) = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Sebastian Aland, Dominic Dumrauf, Martin Gairing, Burkhard Monien, Florian Schoppmann: „Exact Price of Anarchy for Polynomial Congestion Games“ (Proc. STACS 2006)

Ungewichtete Auslastungsspiele – Obere Schranke

Sei $\Phi_d \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ definiert durch $\Phi_d^{d+1} = (\Phi_d + 1)^d$.

Satz

Für ungewichtete Auslastungsspiele mit Latenzfunktionen aus $\mathfrak{P}_d$ gilt ($k := \lfloor \Phi_d \rfloor$):

$$\mathrm{PoA} \leq \frac{(k+1)^{2d+1} - k^{d+1}(k+2)^d}{(k+1)^{d+1} - (k+2)^d + (k+1)^d - k^{d+1}}$$

Beweisidee. Sei $\mathfrak{p}$ (hier reines) NE, $\mathfrak{q}$ Optimum.

$$\mathrm{PC}_i(\mathfrak{p}) \leq \mathrm{PC}_i(\mathfrak{p}_{-i}, q_i) = \sum_{e \in q_i} f_e(l_e(\mathfrak{p}_{-i}, q_i)) \leq \sum_{e \in q_i} f_e(l_e(\mathfrak{p}) + 1)$$

$$\mathrm{SC}(\mathfrak{p}) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{PC}_i(\mathfrak{p}) \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{e \in q_i} f_e(l_e(\mathfrak{p}) + 1) = \sum_{e \in E} \underbrace{l_e(\mathfrak{q}) \cdot f_e(l_e(\mathfrak{p}) + 1)}_{y \cdot f(x+1)}$$

Ungewichtete Auslastungsspiele – Obere Schranke (II)

Wenn $c_1 \in (0,1), c_2 \in \mathbb{R}$, so dass $\forall x, y \in \mathbb{N}_0, f \in \mathfrak{P}_d$ gilt, dass

$$y \cdot f(x+1) \leq c_1 \cdot x \cdot f(x) + c_2 \cdot y \cdot f(y),$$

dann:

$$\begin{aligned}
\mathrm{SC}(\mathfrak{p}) &\leq \sum_{e \in E} l_e(\mathfrak{q}) \cdot f_e(l_e(\mathfrak{p}) + 1) \\
&\leq \sum_{e \in E} \Big[c_1 \cdot l_e(\mathfrak{p}) \cdot f_e(l_e(\mathfrak{p})) + c_2 \cdot l_e(\mathfrak{q}) \cdot f_e(l_e(\mathfrak{q})) \Big] \\
&= c_1 \cdot \mathrm{SC}(\mathfrak{p}) + c_2 \cdot \mathrm{SC}(\mathfrak{q}) \quad \left(\iff \frac{\mathrm{SC}(\mathfrak{p})}{\mathrm{SC}(\mathfrak{q})} \leq \frac{c_2}{1 - c_1} \right)
\end{aligned}$$

Wenn c_1, c_2 optimal bestimmt, wird die Schranke scharf!

Im Fall $d = 1$ sind $c_1 = \frac{1}{3}$ und $c_2 = \frac{5}{3}$ optimal (Christodoulou & Koutsoupias, 2005).

Ungewichtete Auslastungsspiele – Untere Schranke

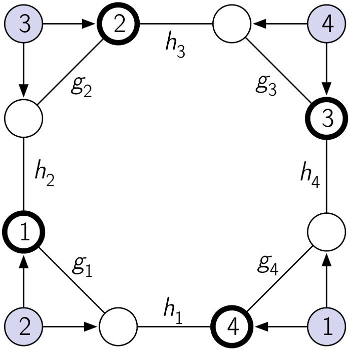
Satz

Die obere Schranke für ungewichtete Auslastungsspiele ist scharf.

Beweisskizze.

- $n \geq \lfloor \Phi_d \rfloor + 2$
- $E = \{g_1, \ldots, g_n\} \,\dot\cup\, \{h_1, \ldots, h_n\}$
- $S_i = \{p_i, q_i\}$
- $f_{g_*}(x) = a \cdot x^d$, $f_{h_*}(x) = x^d$

Wähle $a > 0$ so, dass $\mathfrak{p} = (p_i)_{i=1}^n$ NE mit $\mathrm{PC}_i(\mathfrak{p}) = \mathrm{PC}_i(\mathfrak{p}_{-i}, q_i)$ wird. □



Im Beispiel: $d = 2$, $n = 4$, $\lfloor \Phi_d \rfloor = \lfloor 2{,}148 \rfloor$

Ungewichtete Auslastungsspiele – Untere Schranke

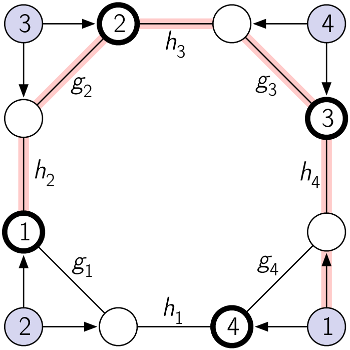
Satz

Die obere Schranke für ungewichtete Auslastungsspiele ist scharf.

Beweisskizze.

- $n \geq \lfloor \Phi_d \rfloor + 2$
- $E = \{g_1, \ldots, g_n\} \,\dot\cup\, \{h_1, \ldots, h_n\}$
- $S_i = \{p_i, q_i\}$
- $f_{g_*}(x) = a \cdot x^d,\ f_{h_*}(x) = x^d$

Wähle $a > 0$ so, dass $\mathfrak{p} = (p_i)_{i=1}^n$ NE mit $PC_i(\mathfrak{p}) = PC_i(\mathfrak{p}_{-i}, q_i)$ wird. □



Im Beispiel: $d = 2,\ n = 4,\ \lfloor \Phi_d \rfloor = \lfloor 2{,}148 \rfloor$

Ungewichtete Auslastungsspiele – Untere Schranke

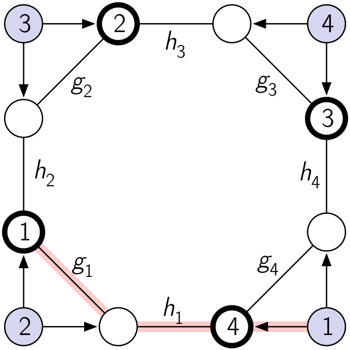
Satz

Die obere Schranke für ungewichtete Auslastungsspiele ist scharf.

Beweisskizze.

- $n \geq \lfloor \Phi_d \rfloor + 2$
- $E = \{g_1, \ldots, g_n\} \,\dot\cup\, \{h_1, \ldots, h_n\}$
- $S_i = \{p_i, q_i\}$
- $f_{g_*}(x) = a \cdot x^d,\ f_{h_*}(x) = x^d$

Wähle $a > 0$ so, dass $\mathfrak{p} = (p_i)_{i=1}^n$ NE mit $PC_i(\mathfrak{p}) = PC_i(\mathfrak{p}_{-i}, q_i)$ wird. □



Im Beispiel: $d = 2$, $n = 4$, $\lfloor \Phi_d \rfloor = \lfloor 2{,}148 \rfloor$

Vergleich: Ungewichteter Preis der Anarchie

Christodoulou & Koutsoupias, 2005: Schranken, wenn Kostenfunktionen aus $\mathfrak{P}_d$:

$$\text{Untere und obere: } d^{d-o(1)} = d^{\Theta(d)}$$

d	Φ_d	Exakt	Obere	Untere
1	1.618	**2,5**	2,5	2,5
2	2.148	**9,583**	10	(2,5)
3	2.630	**41,54**	47	(2,5)
4	3.080	**267,6**	269	21,33
5	3.506	**1.514**	2.154	42,67
6	3.915	**12.345**	15.187	85,33
7	4.309	**98.734**	169.247	170,7
8	4.692	**802.603**	1.451.906	14.762
9	5.064	**10.540.286**	20.241.038	44.287
10	5.427	**88.562.706**	202.153.442	132.860

Gewichtete Auslastungsspiele – Schranken

Satz

Für gewichtete Auslastungsspiele mit Latenzfunktionen aus $\mathfrak{P}_d$ gilt:

$$\mathrm{PoA} \leq \Phi_d^{d+1}$$

Beweisidee. Bestimmte optimale $c_1 \in (0,1)$, $c_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$:

$$y \cdot f(x+y) \leq c_1 \cdot x \cdot f(x) + c_2 \cdot y \cdot f(y)$$

Satz

Die obere Schranke für gewichtete Auslastungsspiele ist scharf.

Beweisskizze. Konstruktion eines Spiels mit NE $\mathfrak{p}$ und Optimum $\mathfrak{q}$:

- Teile Spieler und Ressourcen in jeweils $d+1$ (disjunkte) Klassen $0, 1, \ldots, d$ gleicher Größe k

Gewichtete Auslastungsspiele – Schranken

Satz

Für gewichtete Auslastungsspiele mit Latenzfunktionen aus $\mathfrak{P}_d$ gilt:

$$\mathrm{PoA} \leq \Phi_d^{d+1}$$

Beweisidee. Bestimmte optimale $c_1 \in (0,1), c_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$:

$$y \cdot f(x + {\color{red}y}) \leq c_1 \cdot x \cdot f(x) + c_2 \cdot y \cdot f(y)$$

Satz

Die obere Schranke für gewichtete Auslastungsspiele ist scharf.

Beweisskizze. Konstruktion eines Spiels mit NE $\mathfrak{p}$ und Optimum $\mathfrak{q}$:

- Teile Spieler und Ressourcen in jeweils $d + 1$ (disjunkte) Klassen $0, 1, \ldots, d$ gleicher Größe k

Gewichtete Auslastungsspiele – Untere Schranke (II)

- Latenzfunktion $f_e(x) = a_i \cdot x^d$ für alle $e \in E$ der Klasse i
- Für alle Ressourcen $e \in E$: $l_e(\mathfrak{p}) \stackrel{!}{=} \Phi_d \cdot l_e(\mathfrak{q})$. Dann:

$$\text{PoA} \geq \frac{\text{SC}(\mathfrak{p})}{\text{SC}(\mathfrak{q})} = \frac{k \cdot \sum_{i=0}^{d} a_i (\Phi_d^{i+1})^{d+1}}{k \cdot \sum_{i=0}^{d} a_i (\Phi_d^{i})^{d+1}} = \Phi_d^{d+1}$$

Zu erreichen durch:

- Spieler $u_{i,j}$ der Klasse $i \in [d]_0$, $j \in [k]$, haben Gewicht Φ_d^i
- Im Optimum $\mathfrak{q}$: $u_{i,j}$ benutzt genau eine Ressource der Klasse i
- Im NE $\mathfrak{p}$: $u_{i,j}$ benutzt genau eine Ressource der Klasse $i-1$ (falls $i > 0$) sowie $\binom{d}{i}$-viele der Klasse d. Denn:

$$\sum_{i=0}^{d} \binom{d}{i} \Phi_d^i = (\Phi_d + 1)^d = \Phi_d^{d+1}$$

Gewichtete Auslastungsspiele – Untere Schranke (II)

- Latenzfunktion $f_e(x) = a_i \cdot x^d$ für alle $e \in E$ der Klasse i
- Für alle Ressourcen $e \in E$: $l_e(\mathfrak{p}) \overset{!}{=} \Phi_d \cdot l_e(\mathfrak{q})$. Dann:

$$\text{PoA} \geq \frac{\text{SC}(\mathfrak{p})}{\text{SC}(\mathfrak{q})} = \frac{k \cdot \sum_{i=0}^{d} a_i (\Phi_d^{i+1})^{d+1}}{k \cdot \sum_{i=0}^{d} a_i (\Phi_d^{i})^{d+1}} = \Phi_d^{d+1}$$

Zu erreichen durch:

- Spieler $u_{i,j}$ der Klasse $i \in [d]_0$, $j \in [k]$, haben Gewicht Φ_d^i
- Im Optimum $\mathfrak{q}$: $u_{i,j}$ benutzt genau eine Ressource der Klasse i
- Im NE $\mathfrak{p}$: $u_{i,j}$ benutzt genau eine Ressource der Klasse $i-1$ (falls $i > 0$) sowie $\binom{d}{i}$-viele der Klasse d. Denn:

$$\sum_{i=0}^{d} \binom{d}{i} \Phi_d^i = (\Phi_d + 1)^d = \Phi_d^{d+1}$$

Gewichtete Auslastungsspiele – Untere Schranke (III)

$\mathrm{PC}_i(\mathfrak{p}) = \mathrm{PC}_i(\mathfrak{p}_{-i}, q_i)$ für alle Spieler $i \Longrightarrow$ hom. LGS $B_d \cdot a = 0$:

$$B_d = \begin{pmatrix}
-\Phi_d^{d^2+d+1} + \Phi_d^{d^2+d} & \Phi_d^{d^2} & 0 & \cdots & & & & \cdots & 0 \\
\binom{d}{d-1}\Phi_d^{d^2+d} & -\Phi_d^{d^2+1} & \ddots & & & & & & \vdots \\
\vdots & 0 & \ddots & & & & & & \\
\vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\
\binom{d}{i}\Phi_d^{d^2+d} & 0 & \cdots & 0 & -\Phi_d^{id+d+1} & \Phi_d^{id} & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\
 & & & & \vdots & & & \ddots & 0 \\
\vdots & \vdots & & & \vdots & & & \ddots & \Phi_d^{d} \\
\Phi_d^{d^2+d} & 0 & \cdots & & 0 & \cdots & & 0 & -\Phi_d^{d+1}
\end{pmatrix}$$

B_d hat nur Rang d, denn:

$$-\Phi_d^{d^2+d+1} + \sum_{j=0}^{d} \binom{d}{j} \Phi_d^{d^2+j} = \Phi_d^{d^2} \left[-\Phi_d^{d+1} + \sum_{j=0}^{d} \binom{d}{j} \Phi_d^{j} \right] = 0$$

Induktiv: Alle Lösungen $a = (a_i)_{i=1}^{d+1} \geq 0$ (oder ≤ 0). $\square$

Gewichtete Auslastungsspiele – Untere Schranke (III)

$\mathrm{PC}_i(\mathfrak{p}) = \mathrm{PC}_i(\mathfrak{p}_{-i}, q_i)$ für alle Spieler $i \Longrightarrow$ hom. LGS $B_d \cdot a = 0$:

$$B_d = \begin{pmatrix}
-\Phi_d^{d^2+d+1} + \Phi_d^{d^2+d} & \Phi_d^{d^2} & 0 & \cdots & & & & \cdots & 0 \\
\binom{d}{d-1}\Phi_d^{d^2+d} & -\Phi_d^{d^2+1} & \ddots & & & & & & \vdots \\
\vdots & 0 & \ddots & & & & & & \\
\vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\
\binom{d}{i}\Phi_d^{d^2+d} & 0 & \cdots & 0 & -\Phi_d^{id+d+1} & \Phi_d^{id} & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\
 & & & & \vdots & & & \ddots & 0 \\
\vdots & \vdots & & & \vdots & & & \ddots & \Phi_d^{d} \\
\Phi_d^{d^2+d} & 0 & \cdots & & 0 & \cdots & & 0 & -\Phi_d^{d+1}
\end{pmatrix}$$

B_d hat nur Rang d, denn:

$$-\Phi_d^{d^2+d+1} + \sum_{j=0}^{d} \binom{d}{j} \Phi_d^{d^2+j} = \Phi_d^{d^2} \left[-\Phi_d^{d+1} + \sum_{j=0}^{d} \binom{d}{j} \Phi_d^{j} \right] = 0$$

Induktiv: Alle Lösungen $a = (a_i)_{i=1}^{d+1} \geq 0$ (oder ≤ 0). $\square$

Vergleich: Gewichteter Preis der Anarchie

Awerbuch *et. al.*, 2005: Schranken, wenn Kostenfunktionen aus $\mathfrak{P}_d$:

Untere: $\Omega(d^{d/2}) = d^{\Omega(d)}$ Obere: $\mathcal{O}(2^d d^{d+1}) = d^{\mathcal{O}(d)}$

d	Φ_d	Exakt	Untere
1	1.618	**2,618**	2,618
2	2.148	**9,909**	(2,618)
3	2.630	**47,82**	5
4	3.080	**277,0**	15
5	3.506	**1.858**	52
6	3.915	**14.099**	203
7	4.309	**118.926**	877
8	4.692	**1.101.126**	4.140
9	5.064	**11.079.429**	21.147
10	5.427	**120.180.803**	115.975

Zusammenfassung

Motivation:

- Verkehrs-/Kommunikations-/Logistiknetze
- Eigennütziges Routing in nicht-kooperativen Netzen
  - Teilnehmer frei in ihrem Handeln
  - Optimumsberechnung zu komplex

Problemstellung: Maximaler Verlust im Modell Auslastungsspiel?

In der Diplomarbeit:

- Spieltheoretische Grundlagen
- Existenz von Nash-Equilibrien
- Auslastungsspiele und ihre Eigenschaften
- Exakter Preis der Anarchie bei Kostenfunktionen aus $\mathfrak{P}_d$
- Vergleich mit KP- und Wardrop-Modell
  - Exakter „polynomieller“ PoA bekannt (Roughgarden, 2003)

Zum Weiterlesen...

- George Christodoulou; Elias Koutsoupias:
  On The Price of Anarchy and Stability of Correlated Equilibria of Linear Congestion Games.
  In: *Proceedings of ESA'05*, LNCS 3669, Springer, pp. 59–70.
  http://www.springerlink.com/link.asp?id=7gmc23xxj55yylad
- George Christodoulou; Elias Koutsoupias:
  The Price of Anarchy of Finite Congestion Games.
  In: *Proceedings of STOC'05*, ACM Press, pp. 67–73.
  http://doi.acm.org/10.1145/1060590.1060600
- Baruch Awerbuch; Yossi Azar; Amir Epstein:
  The Price of Routing Unsplittable Flow.
  In: *Proceedings of STOC'05*, ACM Press, pp. 57–66.
  http://doi.acm.org/10.1145/1060590.1060599