Zusammenfassung Stochastik

Hinweis: Es gilt jeweils die letzte Festlegung für Bezeichnungen. Sie werden (insb. am Anfang von Lemmata und Sätzen) nicht notwendigerweise wiederholt.

Sofern nicht anders angegeben, bezeichne Ω im Folgenden stets eine Grundmenge.

0. Mengentheorie

Definition: Sei (A_n) Mengenfolge, $A_n \subseteq \Omega$.

i) $\limsup_{n\to\infty} A_n = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A_n$ für unendlich viele $n\} = \bigcap_{i=1}^\infty \bigcup_{k=i}^\infty A_k$
ii) $\liminf_{n\to\infty} A_n = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A_n$ für alle $n \geq n_0(\omega)\} = \bigcup_{i=1}^\infty \bigcap_{k=i}^\infty A_k$
iii) Falls $\limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n = A$, so gilt: $A_n \to A$ (Grenzwert)
iv) (A_n) heißt monoton wachsend, wenn $A_n \subseteq A_{n+1}$, monoton fallend, wenn $A_n \supseteq A_{n+1}$.

Lemma: Jede monotone Mengenfolge hat Grenzwert

1. Mengensysteme und Maße

1.1 Grundlagen

Motivation: In der Maßtheorie möchte man (möglichst vielen) Teilmengen M des $\mathbb{R}^n$ ein Maß $m(M) \in \overline{\mathbb{R}}$ zuordnen. Dabei sollen folgende Eigenschaften erfüllt werden:

i) Einheitsquader $Q = [0,1]^n$ hat Maß $m(Q) = 1$
ii) Maß ist σ-additiv, d. h. für disjunkte $M_k \subseteq \mathbb{R}^n$: $m(\cup_{i=1}^\infty M_i) = \sum_{i=1}^\infty m(M_i)$
iii) Das Maß m ist invariant unter Bewegungen (= Kongruenzabbildungen)

Satz: (Hausdorff, 1914): Selbst unter Abschwächung von Forderung (ii) auf endliche Additivität gibt es kein derartiges Maß auf ganz $\mathbb{R}^n$ für $n \geq 3$.

Satz: („Banach-Tarski-Paradoxon“, 1924): Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkte Mengen mit nichtleerem Inneren, $n \geq 3$. Dann gibt es disjunkte $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ und Bewegungen $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in E^n$ mit $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ und $B = \bigcup_{i=1}^n \varphi_i(A_i)$

Definition: Ein Mengensystem $\mathcal{A}$ heißt σ-Algebra, wenn:

i) $\Omega \in \mathcal{A}$
ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$
iii) (A_n) Folge auf $\mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{A}$

$(\Omega, \mathcal{A})$ heißt in diesem Fall messbarer Raum.

Folgerung: $\emptyset$, endliche Vereinigungen, beliebige Schnitte sind in einer σ-Algebra enthalten.

Beispiel: Spur-σ-Algebra (oder nur Spur) von $\mathcal{A}$ in $\Omega' \subseteq \Omega$: $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cap \Omega' := \{A \cap \Omega' \mid A \in \mathcal{A}\}$ ist wieder σ-Algebra.

Satz: Beliebige Schnitte von σ-Algebren ergeben wieder eine σ-Algebra.

Definition: Sei $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ Mengensystem. Der Durchschnitt aller σ-Algebren, die $\mathcal{B}$ enthalten, wird als von $\mathcal{B}$ erzeugte σ-Algebra bezeichnet. Symbol: $\sigma(\mathcal{B})$

Definition: Ein Mengensystem $\mathcal{A}$ heißt Algebra, wenn:

i) $\Omega \in \mathcal{A}$
ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$
iii) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

Definition: Ein Mengensystem $\mathcal{R}$ heißt Ring, wenn

i) $\emptyset \in \mathcal{R}$
ii) $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{R}$
iii) $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{R}$

Folgerung: $\Omega \in \mathcal{R} \Rightarrow \forall A \in \mathcal{R}: \ A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{R}$ ist Algebra

1.2 Funktionen auf Mengensystemen

Definition: Sei $\mathcal{R}$ Ring, $\mathcal{A}$ σ-Algebra.

i) Eine Abbildung $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ heißt Inhalt, wenn:
   (a) $\mu(\emptyset) = 0$
   (b) μ ist (endlich) additiv

   μ heißt ferner Prämaß, wenn μ σ-additiv für Mengenfolgen mit Grenzwert in $\mathcal{R}$ ist, also: Für alle $A \in \mathcal{R}$, (A_n) Folge mit paarweise disjunkten Folgengliedern in $\mathcal{R}$, $\bigcup_{i=1}^\infty A_i = A$ gilt: $\mu(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i) = \mu(A)$
ii) Eine Abbildung $\nu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ heißt Maß, wenn:
   (a) $\nu(\emptyset) = 0$
   (b) ν ist σ-additiv

Definition: Ein Maß $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ heißt:

σ-endlich: Es gibt (A_n) in $\mathcal{A}$ mit $\mu(A_i) < \infty$, so dass $\Omega = \bigcup_{i=1}^\infty A_i$
endlich: $\mu(\Omega) < \infty$
Wahrscheinlichkeitsmaß: $\mu(\Omega) = 1$

Lemma: Sei μ Inhalt auf Ring $\mathcal{R}$.

i) Additionssatz: $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$

ii) Monotonie: $A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$
iii) Subadditivität: $\mu(\bigcup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$ (σ-Subadd., falls μ Maß und $\mathcal{R}$ σ-Algebra)

Satz: (Stetigkeit des Maßes) Sei $\forall A \in \mathcal{R} : \mu(A) < \infty$. Dann sind äquivalent:
i) μ ist Prämaß
ii) Für alle Folgen (A_n) in $\mathcal{R}$, (A_n) wachsend, $A_n \to A \in \mathcal{R}$ gilt: $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$
iii) Für alle Folgen (A_n) in $\mathcal{R}$, (A_n) fallend, $A_n \to A \in \mathcal{R}$ gilt: $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$
iv) Für alle Folgen (A_n) in $\mathcal{R}$, (A_n) fallend, $A_n \to \emptyset$ gilt: $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(\emptyset) = 0$

1.3 Das Lebesgue'sche Prämaß

Definition: Die Menge der Intervallvereinigungen von endlich vielen halboffenen Intervallen in $\mathbb{R}^d$ wird mit $\mathcal{R}^d$ bezeichnet.

Satz: $\mathcal{R}^d$ ist Ring.

Lemma: Der durch $(a,b] \mapsto \prod_{i=1}^d (b_i - a_i)$ induzierte Elementarinhalt λ ist Inhalt auf $\mathcal{R}^d$.

Satz: λ ist sogar Prämaß auf $\mathcal{R}^d$.

2. Fortsetzung von Prämaßen zu Maßen

Motivation: Gegeben ein Prämaß f mit Definitionsbereich $\mathcal{A}$, wobei $\mathcal{A}$ Ring. Es sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, wobei $\mathcal{B}$ σ-Algebra. Gesucht: Maß f^* mit Definitionsbereich $\mathcal{B}$.

Definition: Eine Abbildung $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt äußeres Maß, wenn:
i) $\mu^*(\emptyset) = 0$
ii) μ^* monoton
iii) μ^* σ-subadditiv

Im Allgemeinen sind äußere Maße keine Maße. Z. B.: $A \mapsto \begin{cases} 0 & \text{wenn } A = \emptyset \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$

Definition: Eine Menge $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ heißt μ^*-messbar, wenn für alle $Q \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\mu^*(Q) < \infty$ gilt: $\mu^*(Q) \geq \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \cap A^c)$

Lemma: $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ ist μ^*-messbar $\Leftrightarrow$ In vorheriger Definition gilt „="

Satz: (Carathéodory, 1914) Sei μ^* äußeres Maß. Dann ist $\mathcal{A}_{\mu^*} :=$ Mengensystem der μ^*-messbaren Mengen σ-Algebra und $\mu^*\big|_{\mathcal{A}_{\mu^*}}$ ist Maß auf $\mathcal{A}_{\mu^*}$.

Satz: (Fortsetzungssatz) Sei μ Prämaß auf einem Ring $\mathcal{R}$. Dann gilt:
i) $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$, $\mu^*(Q) := \inf\{\sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) \mid (A_n)$ Folge in $\mathcal{R}$, $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \supseteq Q\}$, ist äußeres Maß
ii) $\mu^*\big|_{\mathcal{R}} = \mu$

Satz: (Eindeutigkeitssatz) Sei μ σ-endliches Prämaß auf einem Ring $\mathcal{R}$. Dann kann μ eindeutig auf $\sigma(\mathcal{R})$ fortgesetzt werden.

Definition: Die eindeutige Forsetzung des Elementarinhaltes auf dem Ring $\mathcal{R}^d$ auf $\sigma(\mathbb{R}^d)$ heißt Lebesgue-Maß.

Definition: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{B}^d := \sigma(\mathcal{R}^d)$ heißt Borel-σ-Algebra.

Satz: $\mathcal{B}^d$ wird ebenfalls erzeugt von den offenen, abgeschlossenen und kompakten Mengen.

Definition: Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsende, rechtsstetige Funktion. Der durch $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$, $\mu((a,b]) := F(b) - F(a)$ definierte Inhalt auf $\mathcal{R}$ kann zu einem Maß auf $\mathcal{B}^1$ fortgesetzt werden.

3. Messbare Funktionen

Definition: Eine Funktion $(\Omega_1, \mathcal{F}_1) \to (\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ heißt $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$-messbar, falls für alle $A_2 \in \mathcal{F}_2$ gilt: $f^{-1}(A_2) = (\{\omega_1 \in \Omega 1 \mid f(\omega_1) \in A_2\}) \in \mathcal{F}_1$.

Satz: (Erzeugersatz) Sei $\mathcal{E}$ Erzeuger von $\mathcal{F}_2$, $f : (\Omega_1, \mathcal{F}_1) \to (\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ Abbildung und für alle $E \in \mathcal{E}$ gelte: $f^{-1}(E) \in \mathcal{F}_1$. Dann ist f messbar.

Folgerung: Stetige Abbildungen $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ sind messbar bzgl. $\mathcal{B}^d$.

Satz: Hintereinanderausführungen messbarer Abbildungen sind messbar.

3.1 Reellwertige Abbildungen

Satz: Sei $f : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}})$ Abbildung. Es sind äquivalent:
i) f ist messbar
ii) Für alle $\beta \in \mathbb{R}$ gilt: $\{f \leq \beta\} := \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \leq \beta\} = f^{-1}([-\infty, \beta]) \in \mathcal{F}$

Satz: Ist g messbare Funktion wie f, so gilt: $\{f \leq g\}, \{f < g\}, \dots \in \mathcal{F}$

Satz: Summe und Produkt messbarer Funktionen ist messbar

Satz: Sei (f^i) Folge von messbaren Funktionen. Dann sind $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\limsup_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ messbar. Ferner ist $f(\omega) := \lim_{n\to\infty} f_n(\omega)$ (punktweise Grenzwerte) messbar.

Definition: Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$. $f^+ := \max(f, 0)$, $f^- := -\min(f, 0)$. $\mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{F}) :=$ Menge $(\mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}})$-messbarer nicht negativer Funktionen auf Ω mit Werten in $\overline{R}$.

Definition: Eine Abbildung $f : (\Omega, \mathcal{F}) \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt messbare nicht negeative Treppenfunktion, wenn sie sich darstellen lässt als $f(\omega) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}(\omega)$ für eine Menge $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \mathbb{R}^+$ und eine endliche Folge $(A_i)_{i=1}^n$ mit disjunkten Folgenglieder aus $\mathcal{F}$ und $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$. Die Menge messbarer nicht negativer Treppenfunktionen wird mit $\mathcal{T}^+$ bezeichnet.

Satz: Sei f Abbildung $f : (\Omega, \mathcal{F}) \to \overline{\mathbb{R}}$. Es ist äquivalent:
- i) $f \in \mathcal{M}^+$
- ii) $f(\omega) = \lim_{n\to\infty} u_n(\omega)$ für eine Folge (u_n) von wachsenden Funktionen aus $\mathcal{T}^+$.

4. Integration messbarer Funktionen

Definition: Sei μ Maß auf $(\Omega, \mathcal{F})$. Das Integral einer Treppenfunktion $f : (\Omega, \mathcal{F}) \to \overline{\mathbb{R}}$ aus $\mathcal{T}^+$, $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$, wird definiert als:
$\int f d\mu := \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i)$.

Lemma: Es gilt:
- i) $\int \mathbb{1}_A d\mu = \mu(A)$
- ii) $\int \beta f d\mu = \beta \int f d\mu$ für $\beta \in \mathbb{R}^+$
- iii) Sei f' weitere Treppenfunktion wie f. Dann: $\int (f + f')\mu = \int f d\mu + \int f' d\mu$
- iv) $f \leq f' \Rightarrow \int f d\mu \leq \int f d\mu$.

Definition: Sei $f \in \mathcal{M}^+$, μ Maß auf $(\Omega, \mathcal{F})$, (u_n) Folge von Treppenfunktionen in $\mathcal{T}^+$, $u_n \nearrow f$. Dann: $\int f d\mu := \lim_{n\to\infty} \int u_n d\mu \in [0, \infty]$.

Lemma: Sei $v \in \mathcal{T}^+$, $v \leq \lim_{n\to\infty} u_n$. Dann: $\int v d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int u_n d\mu$.

Folgerung: Die Definition des Integrals ist wohldefiniert (unabhängig der Wahl von u_n)

Satz: Es gelten die Integraleigenschaften für Treppenfunktionen

Satz: (f_n) sei Funktionenfolge in $\mathcal{M}^+$. Dann $\int \sum_{i=1}^\infty f_n d\mu = \sum_{i=1} \int f_n d\mu$. ($\infty$ zulässig)

Definition: Sei μ Maß auf $(\Omega, \mathcal{F})$, f messbare reellw. Funktion, $\int f^+ d\mu < \infty$, $\int f^- d\mu < \infty$. Dann heißt f μ-integrierbar und $\int f d\mu := \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \in \mathbb{R}$.

Folgerung: f μ-int'bar $\Leftrightarrow |f|$ μ-int'bar

Definition: Sei A Eigenschaft bzgl. der Elemente aus Ω. Dann gilt A fast überall (fast sicher), falls es ein $N_A \in \mathcal{F}$ gibt mit $\mu(N_A) = 0$ und für alle $\omega \in N_A^c$ gilt A.

Definition: Ein Maßraum heißt vollständig, wenn jede Teilmenge einer Menge vom Maße 0 zur σ-Algebra gehört.

Lemma: Jeder Maßraum kann vervollständigt werden.

5. Lebesgue-Räume

Es sei im Folgenden stets $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum.

Definition: $\mathcal{L}^1(\mu) :=$ Menge der μ-int'baren Funktionen ($\int |f| d\mu < \infty$)
Für $p > 1$: $\mathcal{L}^p(\mu) :=$ Menge der messbaren Funktionen, für die $|f|^p$ μ-int'bar ist.
$\mathcal{L}^\infty(\mu) :=$ Menge der μ-fast überall beschränkten Funktionen
$N_p(f) := \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p} < \infty \; (= \|f\|_p)$

Satz: (Hölder-Ungleichung) Seien $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$. Dann:
$N_1(f \cdot g) \leq N_p(f) \cdot N_q(g)$

Satz: (Minkowski-Ungleichung) Seien $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $p \geq 1$. Dann:
$N_p(f + g) \leq N_p(f) + N_p(g)$

Bemerkungen: $\mathcal{L}^p(\mu)$, $p \geq 1$ und $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ sind Vektorräume. $N^p(\cdot)$ definiert aber noch keine Norm, daher:

Definition: $\mathcal{N} := \{f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar $\mid f = 0$ fast überall$\}$
$L^p(\mu) := \mathcal{L}^p(\mu)/\mathcal{N}$ (Restklasse bzgl. Addition)
In Worten: Die Elemente von $L^p(\mu)$ sind Klassen von Funktionen, die paarweise fast überall gleich sind. Folglich kann N_p eindeutig auf $L^p(\mu)$ erweitert/neu definiert werden.

Lemma: $L^p(\mu)$ ist normierter Raum: $\|F\|_p = N_p(F)$

Bemerkungen: $L^p(\mu)$ sind Banach-Räume (also Vektorräume V über einem Körper mit einer Norm und einer durch diese Norm induzierten Metrik, bezüglich derer jede Cauchy-Folge aus Elementen von V gegen ein Element von V konvergiert).

6. Konvergenzarten und -sätze

Definition: Sei $(f_n : \Omega \to \mathcal{F})$ Folge messbarer Funktionen. (f_n) konvergiert gegen f:
fast überall: Es gibt ein $N \in \mathcal{F}$ gibt mit $\mu(N) = 0$ und $\forall \omega \in N^c : \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega)$.
dem Maße nach: $\forall \varepsilon > 0$, $A \in \mathcal{F}$, $\mu(A) < \infty$: $\lim_{n\to\infty} \mu(\{|f_n - f| > \varepsilon\} \cap A) = 0$. Symbol: $\mu \lim_{n\to\infty} f_n = f$

im p-ten Mittel: $\lim_{n\to\infty} N_p(f_n - f) = 0$. Symbol: $L^p(\mu) \lim_{n\to\infty} f_n = f$

Lemma: (Chebyshev, Markov) Sei $p > 0$, $\alpha > 0$, $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Dann $\mu(\{|f| > \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha^p} \int |f|^p d\mu$.

Konvergenzbeziehungen

Satz: (Monotone Konvergenz, Satz von Beppo Levi) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsende Folge in $\mathcal{M}^+$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n d\mu$. ($\infty$ ist möglich)

Satz: (Lemma von Fatou) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathcal{M}^+$. Dann gilt $\int \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu$.

Satz: (Majorisierte Konvergenz) Sei (f_n) Funktionenfolge, $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ f. ü., f_n, f int'bar. Ferner $|f_n| \leq g$ f. ü., $\int g d\mu < \infty$ für messbare Funktion g. Dann:
$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \int f d\mu$ und $\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| d\mu = 0$

Satz: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Riemann-int'bare Funktion, λ sei Lebegue-Maß. Dann: $\int_a^b f(x)dz = \int_{[a,b]} f d\lambda$

Satz: (Stetigkeitssatz für Parameter-Integrale) Seien X metrischer Raum, $x_0 \in X$, $f : X \times \Omega \to \mathbb{R}$ Abbildung. Ferner:

i) $\omega \mapsto f(x,\omega) \in L^1(\mu)$ für alle $x \in X$
ii) $x \mapsto f(x,\omega)$ stetig in x_0 für alle $\omega \in \Omega$
iii) $\exists h \in L^1(\mu)$ mit $|f(x,\omega)| \leq h(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$, $x \in X$.

Dann gilt: $x \mapsto \int f(x,\cdot) d\mu$ ist stetig in x_0.

Satz: (Differentiationssatz für Parameter-Integrale) Seien $I \subseteq X$ offene Teilmenge eines metrischen Raums X, $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ Abbildung. Ferner:

i) $\omega \mapsto f(x,\omega) \in L^1(\mu)$ für alle $x \in I$
ii) $x \mapsto f(x,\omega)$ diff'bar auf I mit Ableitung $f'(\cdot,\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$
iii) $\exists h \in L^1(\mu)$ mit $|f'(x,\omega)| \leq h(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$, $x \in I$.

Dann gilt: $g : I \to \mathbb{R}$, $g(x) := \int f(x,\cdot) d\mu$ ist diff'bar auf I, $\omega \mapsto f'(x,\omega) \in L^1(\mu)$ für alle $\omega \in \Omega$ und $g'(x) = \int f(x,\cdot) d\mu$.

7. Transformation von Maßen

Definition: Sei $T : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\Omega', \mathcal{F}')$ messbar, $\mu : \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}$ Maß auf $\mathcal{F}$. Dann heißt $\mu_T : \mathcal{F}' \to \overline{\mathbb{R}}$, $\mu_T := \mu \circ T^{-1}$, Bildmaß von μ unter T. (In der Vorlesung auch T_μ genannt.)

Satz: Sei $f \in L^1(\Omega', \mathcal{F}', T_\mu)$. Dann gilt: $\int f dT_\mu = \int f \circ T d\mu$

Satz: (Transformationssatz) Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus. Dann:

i) $f : V \to \mathbb{R}$ ist λ-int'bar über $V \Leftrightarrow f \circ \varphi \cdot |\det D\varphi|$ ist λ-int'bar über U
ii) $-\infty < \int_V f d\lambda = \int_U f \circ \varphi \cdot |\det D\varphi| d\lambda < \infty$

8. Der Satz von Radon/Nikodym

Satz: Sei $f \in \mathcal{M}^+$, μ Maß. Dann ist $\upsilon : \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}$, $\upsilon(A) := \int_A f d\mu = \int f \mathbb{1}_A d\mu$ ein Maß.

Definition: Es gelte die Gleichung des vorigen Satzes. Dann heißt f Dichte von υ bzgl. μ. Andere Schreibweise für υ ist $f \odot \mu$, motiviert durch den folgenden Satz:

Satz: Sei $g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ messbare und υ-int'bare Abbildung. Dann gilt $\int g d\upsilon = \int g \cdot f d\mu$.

Satz: Seien $f, g \in \mathcal{M}^+$. Dann gilt: $g \odot (f \odot \mu) = (g \cdot f) \odot \mu$

Definition: Seien υ, μ Maße. υ heißt μ-absolutstetig, falls jede μ-Nullmenge auch υ-Nullmenge ist. Symbol: $\upsilon \ll \mu$.

Satz: Folgende Aussagen sind äquivalent, falls υ endlich ist:

i) $\upsilon \ll \mu$
ii) $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall A \in \mathcal{F}, \mu(A) < \delta : \upsilon(A) < \varepsilon$

Satz: (Radon/Nikodym) Seien υ, μ Maße, μ σ-endlich, $\upsilon \ll \mu$. Dann gibt es ein fast überall eindeutiges $f \in \mathcal{M}^+$ mit $\upsilon = f \odot \mu$.

Definition: Seien υ, μ Maße. υ heißt singulär bzgl. μ, wenn es ein $N \in \mathcal{F}$ gilt mit: $\upsilon(N^c) = \mu(N) = 0$. Symbol: $\upsilon \perp \mu$.

Satz: (Erster Zerlegungssatz) Seien υ, μ σ-endliche Maße. Dann gibt es eindeutige υ_1, υ_2 mit $\upsilon = \upsilon_1 + \upsilon_2$ und $\upsilon_1 \ll \mu$ und $\upsilon_2 \perp \mu$.

Definition: Eine Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt absolutstetig, wenn $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall a \leq \alpha_1 < \beta_1 \leq \alpha_2 < \beta_2 \leq \cdots < \beta_n \leq b, \sum_{i=1}^n (\beta_i - \alpha_i) < \delta : \sum_{i=1}^n |F(\beta_i) - F(\alpha_i)| < \varepsilon$.

Satz: (Zweiter Zerlegungssatz) Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rechtsstetige monoton wachsende Funktion. Dann lässt sich das Stieltjes Maß μ_F darstellen als: $\mu_F = \mu_{abs} + \mu_{sing} + \mu_0$. Dabei gilt: $\mu_{abs} \ll \lambda$, $\mu_{sing} \perp \lambda$ mit stetiger Stieltjes Funktion und μ_0 hat Stieltjes Funktion, die nur an Sprungstellen wächst.

9. Produktmaße, Satz von Tonelli/Fubini

Definition: Seien $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$ für $i = 1, \ldots, n$ messbare Räume, $\Omega = \times_{i=1}^n \Omega_i$. Dann heißt

$\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{F}_i := \sigma(\{\times_{i=1}^n F_i \mid F_i \in \mathcal{F}_i \text{ für } i = 1, \dots n\})$ Produkt-σ-Algebra über Ω.

Lemma: Es seien $\mathcal{F}_i = \sigma(\mathcal{E}_i)$ und es gebe Folgen $(E_{i,k})_{k\in\mathbb{N}} \nearrow \Omega_i$ in $\mathcal{E}_i$ für $i = 1, \dots, n$. Dann gilt: $\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{F}_i = \sigma(\{\times_{i=1}^n E_i \mid E_i \in \mathcal{E}_i \text{ für } i = 1, \dots, n\})$

Satz: Seien $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mu_i)$ σ-endliche Maßräume für $i = 1, \dots, n$. Dann gibt es genau ein Maß $\mu =: \bigotimes_{i=1}^n \mu_i$ auf $\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{F}_i$ mit $\mu(\times_{i=1}^n A_i) = \prod_{i=1}^n \mu_i(A_i)$ für $A_i \in \mathcal{F}_i$. Es gilt dann:

i) μ ist durch iterative Integration berechenbar – Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge.
ii) μ ist σ-endlich.

Der Einfachheit halber sei im Folgenden $n = 2$.

Lemma: Sei $f : (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}})$ messbare Abbildung. Dann sind $f_{\omega_1} : (\Omega_2, \mathcal{F}_2) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}})$, $f_{\omega_1}(\omega_2) := f(\omega_1, \omega_2)$ und f_{ω_2} mit analoger Definition messbar.

Satz: (Tonelli/Fubini) Seien $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mu_i)$ σ-endliche Maßräume für $i = 1, 2$, $(\Omega, \mathcal{F}, \mu) = (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$. Sei $f \in \mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{F})$.

i) Die Abbildungen $\omega_2 \mapsto \int f_{\omega_2} d\mu_1$ und $\omega_1 \mapsto \int f_{\omega_1} d\mu_2$ sind messbar. Ferner (*): $\int f d\mu = \iint f_{\omega_2} d\mu_1 d\mu_1 = \iint f_{\omega_1} d\mu_2 d\mu_1$
ii) Sei f int'bar bzgl. μ. Dann: $f_{\omega_1}, f_{\omega_2}$ sind μ_2- bzw. μ_1-int'bar für fast alle ω_2 bzw. ω_1. Ferner sind $\omega_1 \mapsto \int f_{\omega_1} d\mu_2$ und $\omega_2 \mapsto \int f_{\omega_2} d\mu_1$ int'bar und es gilt (*).

Folgerung: Seien f_1, f_2 messbare Abbildungen. Dann gilt: $(f_1 \odot \mu_1) \otimes (f_2 \odot \mu_2) = f \odot (\mu_1 \otimes \mu_2)$. Dabei ist $f(x_1, x_2) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2)$.

10. Einführung in die Wkt'theorie

Definition: Ein Maßraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ heißt Wkt'raum, wenn P Wkt'maß ist. Ist dies der Fall und seien ferner $(\Omega', \mathcal{F}')$ messbarer Raum und $X : \Omega \to \Omega'$ eine $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$-messbare Abbildung, dann heißt X Zufallsvariable (ZV).

Definition: Sei X ZV. Das Bildmaß $P_X = P \circ X^{-1}$ heißt Verteilung von X.

Definition: Sei $X \in \mathcal{M}^+ \cap L^1(P)$ ZV. $\operatorname{E} X := \int X dP$ heißt Erwartungswert der ZV X.

Lemma: (Allgemeine Transformationsformel) $E(g \circ X) = \int g dP_X$

Definition: Die mittlere quadratische Abweichung vom Erwartungswert, $\operatorname{V}(X) = D^2 X := \operatorname{E}(X - \operatorname{E} X)^2 \in [0, \infty]$ heißt Varianz der ZV X. $\sqrt{\operatorname{V}(X)}$ heißt Streuung.

Satz: Sei X ZV. Eigenschaften der Varianz:

i) $X \in L^2(P) \Leftrightarrow \operatorname{V}(X) < \infty$
ii) $V(X) = \operatorname{E}(X^2) - (\operatorname{E} X)^2$
iii) $\operatorname{V}(aX + b) = a^2 \operatorname{V}(X)$ für $a, b \in \mathbb{R}$
iv) $(\operatorname{E} X)^2 \le \operatorname{E}(X^2)$
v) $P(|X - \operatorname{E} X| > \alpha) \le \frac{\operatorname{V}(X)}{\alpha^2}$ für $\alpha > 0$

Definition: Sei $p \in \mathbb{N}, q \ge 1$. Dann heißt:

i) $\operatorname{E} X^p$ p-tes Moment,
ii) $\operatorname{E}(X - \alpha)^p$ p-tes α-zentriertes Moment,
iii) $\operatorname{E} |X|^q$ q-tes absolutes Moment und
iv) $\operatorname{E} |X - \alpha|^q$ q-tes absolutes α-zentriertes Moment.

Definition: Eine ZV X mit Werten in $\mathbb{R}^n$ und Verteilung P_X heißt diskret, wenn $P_X = \sum_{i=1}^\infty \alpha_i \delta_{x_i}$ für $x_i \in \mathbb{R}^d$ für unterschiedliche x_i und positive α_i.

Definition: X heißt stetig, wenn $P_X = f \odot \lambda$ für eine Abbildung f, die fast überall Dichte von P_X bzgl. des Lebesgue-Maßes λ in $\mathbb{R}^n$ ist.

Satz: Sei (X_n) Folge von ZV, $X_n \sim \operatorname{Bin}(n, p_n)$, $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Bin}(n, p_n)(\{\tau\}) = \operatorname{Poi}(\lambda)(\{\tau\})$ für $\tau \in \mathbb{N}_0$.

Lemma: Sei $X \sim \operatorname{N}(\mu, \sigma^2)$. Dann gilt: $aX + b \sim \operatorname{N}(a\mu + b, |a|^2\sigma^2)$

Lemma: Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige, $\operatorname{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$-verteilte ZV. Dann gilt: $\sum_{i=1}^n X_i \sim N(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2)$.

Definition: Sei $(X_i)_{i\in I}$ Folge von $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$-ZV. Wenn für jede nicht-leere Indexmenge $\{i_1, \dots, i_n\}$ und jede Wahl von Mengen $F_{i_k} \in \mathcal{F}_{i_k}$, $k = 1, \dots, n$, gilt, dass $P(X_{i_1} \in F_{i_1}, \dots, X_{i_k} \in F_{i_k}) = \prod_{k=1}^n P(X_{i_k} \in F_{i_k})$, dann heißt die Folge (X_i) unabhängig.

11. Mehrstufige Zufallsexperimente

Definition: Seien X_i $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$-ZV. Die Verteilung P_X der ZV $X := (X_1, \dots, X_n)$, $P_X(A) := P((X_1, \dots, X_n) \in A)$ für $A \in \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{F}_i$, heißt gemeinsame Verteilung der ZV X_i.

Definition: Die $P_{X_i}(A) := P(X_i \in A_i)$ heißen Randverteilungen.

Definition: Seien $X, Y \in L^2(P)$ ZV. Dann:

i) $\operatorname{CoV}(X, Y) := \operatorname{E}[(X - \operatorname{E} X)(Y - \operatorname{E} Y)]$ heißt die Kovarianz von X, Y.
ii) $\operatorname{Corr}(X, Y) = \varrho(X, Y) := \frac{\operatorname{CoV}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{V}(X) \cdot \operatorname{V}(Y)}} \in [-1, 1]$ heißt Korrelationskoeffizient von X, Y.

Satz: Eigenschaften:

i) $\operatorname{CoV}(X, X) = \operatorname{V}(X)$
ii) $\operatorname{CoV}(X, Y) = \operatorname{E} XY - \operatorname{E} X \cdot \operatorname{E} Y$

iii) $\operatorname{CoV}(aX+b, cY+d) = ac \operatorname{CoV}(X,Y)$ für $a, b \in \mathbb{R}$
iv) $\mathrm{V}(\sum_{i=1}^n a_i X_i) = \sum_{i=1}^n a_i^2 V(X_i) + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} a_i a_j \operatorname{CoV}(X_i, X_j)$
v) $|\operatorname{Corr}(X,Y)| = 1 \Leftrightarrow Y = aX + b$ fast überall

Lemma: Seien $X_1, \dots, X_n \in L^2(P)$ paar. unkorrelierte ZV. Dann gilt $\mathrm{V}(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n \mathrm{V}(X_i)$.

Satz: Seien X, V ZV. Es ist äquivalent:
i) X, Y unabhängig
ii) $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$
iii) $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$, wenn $F_{X,Y}$ diff'bar bei (x,y)

Satz: Seien X, Y unkorrelierte normalverteilte ZV. Dann sind X, Y unabhängig.

Definition: Sei $T : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n \otimes \mathcal{B}^n) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ messbare Abbildung, $T(x,y) = x + y$. Seien μ_1, μ_2 endliche Maße auf $\mathcal{B}^n$. Dann heißt $\mu_1 * \mu_2 := T_{\mu_1 \otimes \mu_2} = (\mu_1 \otimes \mu_2) \circ T^{-1}$ Faltungsprodukt von μ_1 und μ_2.

Satz: Seien μ_1, μ_2, μ_3 endliche Maße. Dann:
i) $\mu_1 * \mu_2 = \mu_2 * \mu_1$
ii) $\mu_1 * (\mu_2 + \mu_3) = \mu_1 * \mu_2 + \mu_1 * \mu_3$
iii) $\mu_1 * (\alpha\mu_2) = (\alpha\mu_1) * \mu_2 = \alpha(\mu_1 * \mu_2)$ für $\alpha \ge 0$
iv) $\mu_1 * (\mu_2 * \mu_3) = (\mu_1 * \mu_2) * \mu_3$

Lemma: Seien $P_1 = f_1 \odot \lambda$, $P_2 = f_2 \odot \lambda$, $f_1, f_2 \ge 0$. Dann gilt: $P_1 * P_2 = f \odot \lambda$ für $f(x) = \int_{\mathbb{R}} f_1(x - y) f_2(y) d\lambda(y)$

Lemma: Seien f_1, f_2 Wkt'dichten bzgl. λ von ZV X_1, X_2. Dann gilt: $F_{X_1+X_2}(z) = \int_{\mathbb{R}} F_1(z - y) F_2(y) d\lambda(y)$

Satz: Seien $P_1 \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, $P_2 \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$. Dann gilt: $P_1 * P_2 \sim \mathrm{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

12. Die charakteristische Funktion

Definition: Sei μ ein endliches Maß auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$. Dann heißt $\widehat{\mu} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\widehat{\mu}(x) := \int e^{i\langle x,y \rangle} d\mu(y)$ charakteristische Funktion. Falls P Wkt'verteilung ist, definiere: $\widehat{P_X}(x) = \mathrm{E}\, e^{i\langle x,X \rangle}$.

Satz: Eigenschaften der char. Funktion:
i) $\widehat{P}(-x) = \overline{\widehat{P}(x)}$ (konj. kompl.)
ii) $X \sim P_X \sim \widehat{P_X}$ und $aX + b \sim P_{aX+b} \sim e^{ibX} \widehat{P_X}(aX)$ für X reellwertig
iii) $\widehat{P}(0) = 1$, $|\widehat{P}(x)| \le 1$
iv) $\widehat{P}$ ist gleichmäßig stetig
v) $\widehat{P}$ ist nicht negativ definit

Lemma: Seien X, Y unabhängige ZV. Dann gilt: $\widehat{P_X} \widehat{P_Y} = \widehat{P_{X+Y}} = \widehat{P_X * P_Y}$

Lemma: Es gilt: X, Y unabhängig $\Leftrightarrow \widehat{P_{X,Y}}(x,y) = \widehat{P_X}(x) \widehat{P_Y}(y)$

Satz: (Inversionsformel, Eindeutigkeitssatz für char. Funktionen) Sei X ZV mit Verteilungsfunktion F und char. Funktion $\widehat{P}$. Ferner sei $G(x) := \frac{1}{2}(F(x) + F(x^-))$. Dann gilt: $G(b) - G(a) = \lim_{N \to \infty} \int_{-N}^{N} \frac{e^{-iax} - e^{-ibx}}{2\pi i x} \widehat{P}(x) dx$.

Folgerung: Seien X, Y ZV mit gleicher char. Funktion. Dann gilt: $P_X = P_Y$.

Satz: Sei die char. Funktion von X (absolut int'bar). Dann gilt für die Dichte $f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\langle x,y \rangle} \widehat{P_X}(y) d\lambda(\mu)$

Satz: (Entwicklungssatz) Sei X ZV mit $\mathrm{E}\,|X|^n < \infty$. Dann: $\widehat{P_X}(x) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(ix)^k}{k!} \mathrm{E}\, X^k + R_n(x)$. Ferner $\widehat{P_X}(0) = i^k \mathrm{E}\, X^k$ für $k \in \mathbb{N}_0$ und $R_n(x) = o(|X|^n)$.

Definition: Sei $X := (X_1, \dots, X_n)$ zufälliger Vektor, $n \ge 2$. Dann heißt $\mathrm{E}\, X := (\mathrm{E}\, X_1, \dots, \mathrm{E}\, X_n)$ Erwartungsvektor und $\operatorname{CoV}(X) := (\mathrm{E}((X_i - \mathrm{E}\, X_i)(X_j - \mathrm{E}\, X_j)))_{i,j=1,\dots,n}$ Kovarianzmatrix.

Definition: Ein zufälliger Vektor X heißt normalverteilt, falls er die gemeinsame Dichte $f_X(x) = (\frac{1}{2\pi})^{n/2} (\det C)^{1/2} e^{-1/2 (x-m)^T C^{-1} (x-m)} \sim N(m, C)$ hat, wobei $m \in \mathbb{R}^n$ und C pos. definitive, symmetrische $d \times d$-Matrix ist.

Satz: Sei $X \sim N(m, C)$ ZV, $m \in \mathbb{R}^n$, C post. definit, symm. Dann gilt $\widehat{N(m,C)}(x) = e^{i\langle m,x \rangle - 1/2 \cdot \langle x, Cx \rangle}$ und $m = \mathrm{E}\, X$, $C = \operatorname{CoV}(X)$.

12.1 Der Stetigkeitssatz

Definition: Sei $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge von Wkt'verteilungen und P_0 Wkt'vert. auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$. (P_n) heißt schwach konvergent gegen P_0, wenn für jede stetige beschränkte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt: $\lim_{n \to \infty} \int f dP_n = \int f dP_0$. Symbole: $\operatorname{wlim}_{n \to \infty} P_n = P_0$, $P_n \xrightarrow{w} P_0$.

Definition: Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge von ZV, X_0 ZV mit Werten in $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$. Dann heißt (X_n) konvergent in Verteilung gegen X_0, wenn $P_{X_n} \xrightarrow{w} P_{X_0}$. Symbole: $\mathcal{L} \lim_{n \to \infty} X_n = X_0$, $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X_0$.

Satz: Sei (X_n) Folge von ZV auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Ist X_0 P-fast sicher konstant, so gilt: $\mathcal{L} \lim_{n \to \infty} X_n = X_0 \Leftrightarrow P \lim_{n \to \infty} X_n = X_0$.

Satz: Sei (X_n) Folge von ZV, X_0 ZV mit Werten in $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Dann: $\mathcal{L}\lim_{n\to\infty} X_n = X_0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_{X_0}(x)$ für alle Stetigkeitspunkte von F_{X_0}.

Vorlesung vom 14.12.

13. Asymptotisches Verhalten von Summen von Zufallsvariablen

13.1 Verallgemeinerung des zentralen GWS

Definition: Sei $X := (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge von unabhängigen ZV, $X_n \in L^2(P)$. Setze: $\xi_n := \mathrm{E}\, X_n$, $s_n := \mathrm{V}\left(\sum_{i=1}^n X_n\right)$. Ferner

$$L_n^X(\varepsilon) := \frac{1}{s_n} \sum_{i=1}^n \int_{\{|X_i-\xi_i|\geq \varepsilon s_n^{1/2}\}} (X_i - \xi_i)^2 dP.$$

Dann genügt (X_n) der Lindeberg-Bedingung, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ gilt: $\lim_{n\to\infty} L_n(\varepsilon) = 0$.

Satz: (Lindeberg, Feller) Lindeberg-Bedingung gilt genau dann, wenn $\mathcal{L}\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\xi_i)}{s_n^{1/2}} = N(0,1)$ und $\lim_{n\to\infty} \max_{j\leq n} \frac{V(X_j)}{V(S_n)} = 0$.

Definition: (X_n) genügt der Lyapunov-Bedingung, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^{1+\delta/2}} \sum_{i=1}^n \int |X_i - \xi_i|^{2+\delta} dP = 0$$

für ein $\delta > 0$.

13.2 Das Gesetz vom iterierten Logarithmus

Satz: Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge von iid-ZV, $\mu := \mathrm{E}\, X$, $\sigma^2 := \mathrm{V}(X_n) < \infty$, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Dann gilt:
$\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{n}{2\sigma^2 \ln(\ln(n))}\right)^{1/2} \left(\frac{S_n}{n} - \mu\right) = 1$ und
$\liminf_{n\to\infty} \left(\frac{n}{2\sigma^2 \ln(\ln(n))}\right)^{1/2} \left(\frac{S_n}{n} - \mu\right) = -1$

Satz: Seien $\mathrm{E}\, X_1 = 0$, $M(x) := \mathrm{E}(e^{xX_1})$ endlich, $\alpha > 0$, $P(X_1, > 0) > 0$. Ferner sei: $\psi(a) := -\ln(\inf_{\varepsilon>0}\{e^{\alpha t} M(t)\}) > 0$. Dann gilt: $\lim_{n\to\infty} P(S_n > na)^{1/n} = e^{-\psi(\alpha)}$.

14. Simulation und Zufallsgeneratoren

Satz: Sei $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge von unabh., $\mathcal{U}(0,1)$-vert. ZV. Sei $f : [0,1] \to [0,1]$ int'bare Funktion, $I := \int_0^1 f(x)dx$. Dann gilt: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(U_k) = \mathrm{E}(f(U_k)) = \mathrm{E}\, X = I$.

Definition: Lineare Kongruenzmethode zur Erzeugung von $\mathcal{U}[0,1]$-ZV: $x_{n+1} = (ax_n + c)\mathrm{mod} m$.

Satz: Seien a, c teilfremd, $p \mid (a-1)$, p prim, $p \mid m$, falls $4 \mid m$: $4 \mid a-1$. Dann gilt: Länge der Periode ist m.

Satz: Sei F invertierbar (streng monoton wachsend), $U \sim \mathcal{U}[0,1]$ ZV. Dann hat $X = F^{-1}(U)$ Verteilungsfunktion F.

Definition: Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktion. Dann heißt $x \to \inf\{z \in \mathbb{R} \mid F(z) \geq x\}$ die verallgemeinerte Inverse von F. Dabei seien $\inf \mathbb{R} = -\infty$, $\inf \emptyset = +\infty$.

Box-Muller-Verfahren

15. Zuverlässigkeitstheorie

Definition: Sei T ZV, die eine Lebensdauer darstellt. Dann heißt $R(t) := P(T > t)$ Überlebensfunktion und $\lambda(t) = \lim_{h\searrow 0} h^{-1} P(t < T \leq t + h \mid T > t)$ Ausfallrate von T.

16. Aktien und Optionen

Vorlesung vom 13.1., Black-Scholes-Formel

17. Einführung in die Statistik

Definition: Allgemeines statistisches Modell: $(X, \mathcal{F}, P_\theta, \theta \in \Theta)$, wobei X Stichprobenraum, $\mathcal{F}$ σ-Algebra auf X, $\{P_\theta \mid \theta \in \Theta\}$ Familie von Wkt'maßen auf $\mathcal{F}$ und Θ Parametermenge. Ein Modell der Form $(E^n, \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{E}, \bigtimes_{i=1}^n Q_\theta, \theta \in \Theta)$ heißt n-fach Modell.

Definition: Sei $X := (X_1, \ldots, X_n) \in E^n$ iid ein Zufallsvektor. Ferner sei $T_n : E^n \to \Theta$ eine Abbildung. Dann nennt man die Zufallsvariable $T_n(X_1, \ldots, X_n)$ eine Schätzung und die Abbildungen $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Schätzer.

Definition: Ein Schätzer heißt konsistent, falls $T_n \xrightarrow{P_\theta} \theta$ für $n \to \infty$.

Definition: Ein Schätzer heißt erwartungstreu, wenn $\mathrm{E}\, T_n(X_1, \ldots, X_n) = \theta$ gilt.

Vorlesung vom 20.1.

Definition: Ein Schätzer T heißt bester Schätzer für alle erwartungstreuen Schätzer, falls $\mathrm{V}_\theta(T) \leq \mathrm{V}_\theta(S)$ für alle anderen erwartungstreuen Schätzer S und für alle $\theta \in \Theta$.

Definition: Seien $(X, \mathcal{F}, P_\theta, \theta \in \Theta)$ statistisches Modell, $\tau : \Theta \to \mathbb{R}$ Kenngröße zu dem zu ermittelnden Parameter τ, $0 < \alpha < 1$. Dann heißt eine Abbildung $C : X \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ Konfidenzbereich zu Intervallwkt. a, wenn gilt $\inf_{\theta \in \Theta} P_\theta(\{x \in X \mid \tau(\theta) \in C(x)\}) \geq 1 - \alpha$.

Satz: Seien $X_1, \dots, X_n \sim N(m, v)$ unabhängig, $X = (X_1, \dots, X_n)$. Ferner $V(X) := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - M(X))^2$. Dann gilt $\frac{(n-1) \cdot V(X)}{v}$ ist χ^2-verteilt mit $n - 1$ Freiheitsgeraden.

Satz: Es gilt ferner: $M(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ und $V(X)$ sind unabhängig und $T_m(X) := \frac{M(X)-m}{V(X)^{1/2}} \sqrt{n}$ ist Student-verteilt mit $n - 1$ Freiheitsgraden.

17.1 Statistische Tests

Definition: Sei H_0 Hypothese. Ein Fehler erster Art (α-Fehler) tritt auf, wenn nach Schätzer H_0 abgelehnt wird, obwohl H_0 zutrifft. Ein Fehler zweiter Art tritt auf, wenn H_0 angenommen wird, obwohl H_0 nicht zutrifft.