Eigennütziges Routing in Netzwerken mit Kapazitätsbeschränkungen (nach Correa, Schulz und Stier-Moses)

Projektgruppe SEROSE

Yvonne Bleischwitz, Rainer Feldmann, Burkhard Monien

Florian Schoppmann

Fakultät für Elektrotechnik, Mathematik und Informatik
Universität Paderborn

20. Januar 2005

Motivation

Modellierung von Verkehrsnetzen:

- Anwendungsbeispiel: individueller Straßenverkehr
  - Benutzte Wege, wenn Verkehrsteilnehmer eigennützig agieren?
  - Mautplanung zur Steuerung
  - Neue Straßen

- Anwendungsbeispiel: Datenübertragung in dezentralen Netzwerken

Erstes Prinzip von Wardrop (1952) für verkehrsreiche Netze:

> *The journey times on all the routes actually used are equal, and less than those which would be experienced by a single vehicle on any unused route.*

$\longrightarrow$ Nash-/Benutzer-Equilibrium (BE)

Problemstellung

Wardrops zweites Prinzip charakterisiert Systemoptimum (SO):

The average journey time is a minimum.

Äquivalent: Gesamtreisezeit minimal

Bekannt:

- BE im Allgemeinen nicht optimal („Preis der Anarchie“)
- Aber: Roughgarden & Tardos (2002): Unter bestimmten Voraussetzungen (insb. ohne Kapazitätsbeschränkungen) Verhältnis von $\leq \frac{4}{3}$

Correa, Schulz, Stier-Moses (2004):

- Aufnahme von Kapazitätsbeschränkungen ins Modell
- Effizienz von eigennützigem Verkehr?
- Allgemeinere Beweise

Problemstellung

Wardrops zweites Prinzip charakterisiert Systemoptimum (SO):

> *The average journey time is a minimum.*

Äquivalent: Gesamtreisezeit minimal

Bekannt:

- BE im Allgemeinen nicht optimal („Preis der Anarchie")
- Aber: Roughgarden & Tardos (2002): Unter bestimmten Voraussetzungen (insb. ohne Kapazitätsbeschränkungen) Verhältnis von $\leq \frac{4}{3}$

Correa, Schulz, Stier-Moses (2004):

- Aufnahme von Kapazitätsbeschränkungen ins Modell
- Effizienz von eigennützigem Verkehr?
- Allgemeinere Beweise

Das Modell

Definition (Netzwerk ohne Kapazitätsbeschränkungen)

- gerichteter Graph $D = (N, A)$
- Start-Ziel- (OD-) Paare (o_i, d_i) mit *Bedarf* d_i
- Traversierungszeiten: *Latenzfunktionen* $\ell_a(\cdot)$
  - nicht-negativ, monoton wachsend, stetig
  - aus einer bestimmten Klasse $\mathcal{L}$ (z. B. Polynome)

$\mathcal{P}_i :=$ Menge aller Pfade von o_i nach d_i

$\mathcal{P} := \cup \mathcal{P}_i$

$3 \cdot (2 \cdot 3 + 1) + 1 \cdot 1 = 22$

Definition (Routing)

- Nicht-negativer Vektor $f := (f_P)_{P \in \mathcal{P}}$
- Erfüllt Bedarf: $\sum_{P \in P_i} f_P = d_i$

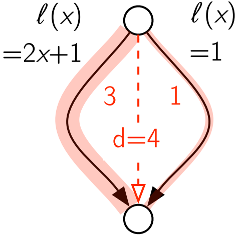
$C(f) := \sum_{P \in \mathcal{P}} \ell_P(f) f_P = \sum_{a \in A} \ell_a(f_a) f_a$

Das Modell

Definition (Netzwerk ohne Kapazitätsbeschränkungen)

- gerichteter Graph $D = (N, A)$
- Start-Ziel- (OD-) Paare (o_i, d_i) mit *Bedarf* d_i
- Traversierungszeiten: *Latenzfunktionen* $\ell_a(\cdot)$
  - nicht-negativ, monoton wachsend, stetig
  - aus einer bestimmten Klasse $\mathcal{L}$ (z. B. Polynome)

$\mathcal{P}_i :=$ Menge aller Pfade von o_i nach d_i
$\mathcal{P} := \cup \mathcal{P}_i$



$3 \cdot (2 \cdot 3 + 1)$
$+ 1 \cdot 1 = 22$

Definition (Routing)

- Nicht-negativer Vektor $f := (f_P)_{P \in \mathcal{P}}$
- Erfüllt Bedarf: $\sum_{P \in P_i} f_P = d_i$

$C(f) := \sum_{P \in \mathcal{P}} \ell_P(f) f_P = \sum_{a \in A} \ell_a(f_a) f_a$

Berechnung von SO und BE

Systemoptimum gemäß Wardrops zweitem Prinzip:

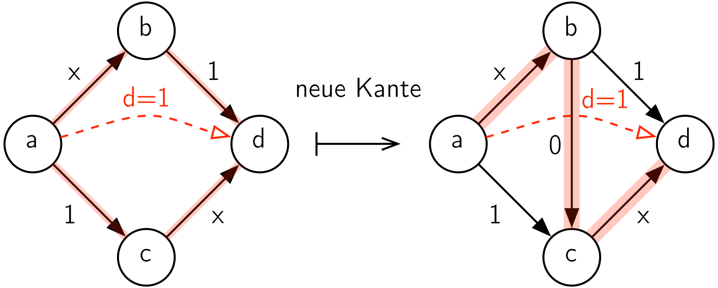
$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{a \in A} \ell_a(f_a) f_a & & \qquad (1) \\ \text{so dass} \quad & \sum_{P \ni a} f_P = f_a & & \text{für alle } a \in A, \\ & \sum_{P \in \mathcal{P}_k} f_P = d_k & & \text{für alle } k \in K, \\ & f_P \geq 0 & & \text{für alle } P \in \mathcal{P}. \end{aligned}$$

Beckmann, McGuire, Winsten (1956): Ersetze für BE (1) durch

$$\min \quad \sum_{a \in A} \int_0^{f_a} \ell_a(x)\,dx$$

Braess' Paradoxon

BE muss nicht optimal sein, Beispiel nach Braess (1968):

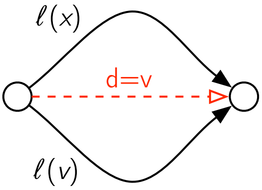


SO berechnen (Kurze Erinnerung an die Analysis):
$h(x, y) := x^2 + x + y^2 + y$, Nebenbedingung: $x + y = 1$, $x, y \geq 0$
Implizit definierte Funktion: $g(x, y) = x + y - 1$. Gesucht:

$$\min_{\substack{g(x,y)=0 \\ x,y \in [0,1]}} \{h(x, y)\} = \min_{x \in [0,1]} \{h(x, 1 - x)\}$$

Preis der Anarchie

Roughgarden (2003): *Preis der Anarchie*



$$\gamma := \max_{f \text{ ist BE}} \left\{ \frac{C(f)}{C(SO)} \right\}$$

- unabhängig von Netzwerk-Topologie, wenn: $\forall \ell \in \mathcal{L} : \ell(x)$ diff'bar, $\ell(x)x$ konvex

Für jedes Netzwerk: $\gamma \leq \alpha(\mathcal{L})$, wobei

$$\alpha(\ell) := \sup_{\substack{v>0 \\ \ell(v)>0}} \left(\lambda \cdot \frac{\ell(\lambda v)}{\ell(v)} + (1-\lambda) \right)^{-1} \text{ und } \alpha(\mathcal{L}) := \sup_{\ell \in \mathcal{L}} \alpha(\ell)$$

Dabei ist $\lambda \in [0,1]$ Lösung für $\ell(\lambda v) + \ell'(\lambda v)\lambda v = \ell(v)$.

$\alpha(\mathcal{L})$ in sehr einfachen Netzwerken (oben rechts) bestimmbar!

Netzwerke mit Kapazitätsbeschränkungen

Keine Kapazitätsbeschränkungen:

- Hearn (1980): "the predicted flow on some links will be far lower or far greater than the traffic engineer knows they should be"
- Larsson & Patrikson (1995): Unrealistisch im Überlast-Bereich
- etc.

Einführung von Kapazitätsbeschränkungen aus $\mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ für jede Kante $a \in A$
$\rightarrow$ Echte Erweiterung des Modells

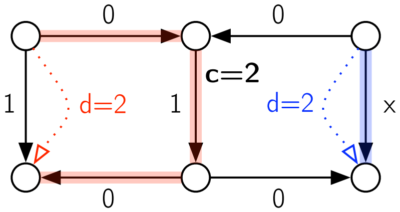
Frage: Was ist nun ein Benutzer-Equilibrium?

Equilibrium mit Kapazitätsbeschränkungen

Definition (BE mit Kapazitätsbeschränkungen, BEK)

Ein Routing ist BEK, gdw. kein Verkehrsteilnehmer durch Wechsel auf einen anderen Pfad mit freier Kapazität seine Kosten echt senken kann.

- Wardrops Prinzip gilt nicht mehr
  $\longrightarrow$ unterschiedliche Reisezeit auf unterschiedlichen Pfaden
- Verschiedene Equilibria von unterschiedlicher Qualität



- Menge von BEKs im Allgemeinen nicht konvex
- Ohne Kapazitäten: Alle BE von gleicher Qualität, Menge von BE konvex

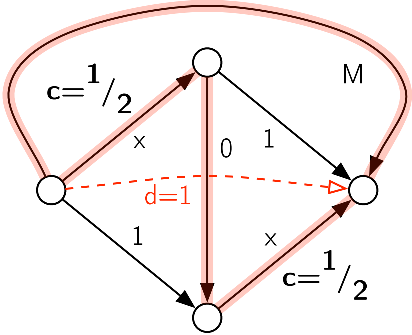
Preis der Anarchie in Netzwerken *mit* Kapazitätsbeschränkungen

BEK beliebig schlecht:

- Preis der Anarchie:

$$\gamma := \max_{f \text{ ist BEK}} \left\{ \frac{C(f)}{C(SO)} \right\}$$

- f sei ein BEK wie dargestellt



$$C(f) = \left(\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} + M \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(M+1)$$

$$C(SO) = \left(\frac{1}{2} + 1\right) \cdot \frac{1}{2} + \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Ein gutes Equilibrium

Idee: Kapazitätsbeschränkung in Nebenbedingung:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{a \in A} \int_0^{f_a} \ell_a(x)dx \\ \text{so dass} \quad & f \text{ zulässiges Routing} \\ & f \text{ hält Kapazitätsbeschränkungen ein} \end{aligned}$$

Definition (BMW-Equilibrium, BMW)

Ein Routing ist BMW-Equilibirum, gdw. es optimale Lösung zu obigem Optimierungsproblem ist.

(Vgl. Berechnung von BE nach Beckmann, McGuire, Winsten).

Charakterisierung eines BMW

Kostenfunktion mit konstanten Latenzen: $C^f(x) := \sum_{a \in A} \ell_a(f_a) x_a$

Lemma

Ein zulässiges Routing f ist BMW, gdw. $C^f(f) \leq C^f(x)$ für alle Routings x.

Beweisskizze. $(\ell_a(f_a))_{a \in A}$ ist Gradient von

$$(f_a)_{a \in A} \mapsto \sum_{a \in A} \int_0^{f_a} \ell_a(x) dx$$

Sei x zulässiges Routing:

- $x - f$ zulässige Richtung
- Richtungsableitung $\left\langle (\ell_a(f_a))_{a \in A}, \frac{x-f}{\|x-f\|_2} \right\rangle \geq 0$ □

Charakterisierung eines BMW

Kostenfunktion mit konstanten Latenzen: $C^f(x) := \sum_{a \in A} \ell_a(f_a) x_a$

Lemma

Ein zulässiges Routing f ist BMW, gdw. $C^f(f) \leq C^f(x)$ für alle Routings x.

Beweisskizze. $(\ell_a(f_a))_{a \in A}$ ist Gradient von

$$(f_a)_{a \in A} \mapsto \sum_{a \in A} \int_0^{f_a} \ell_a(x) dx$$

Sei x zulässiges Routing:

- $x - f$ zulässige Richtung
- Richtungsableitung $\left\langle (\ell_a(f_a))_{a \in A}, \frac{x-f}{\|x-f\|_2} \right\rangle \geq 0$ $\square$

Ein BMW ist ein BEK

Lemma

Sei f Routing. Ist f BMW, dann ist es auch ein BEK.

Beweis. Annahme: Ein Verkehrsteilnehmer kann durch Wechsel auf einen anderen Pfad mit freier Kapazität seine Kosten echt senken.

Bezeichne:

- x entstehendes Routing
- ε Teil der Verkehrsteilnehmer
- R neuer Pfad, Q alter Pfad

Es gilt:

$$C^f(x) - C^f(f) = \varepsilon(\ell_R(f) - \ell_Q(f))$$

Nach Annahme: $\ell_R(f) < \ell_Q(f) \Longrightarrow C^f(x) < C^f(f)$. $\lightning$ $\square$

Ein BMW ist ein BEK

Lemma

Sei f Routing. Ist f BMW, dann ist es auch ein BEK.

Beweis. Annahme: Ein Verkehrsteilnehmer kann durch Wechsel auf einen anderen Pfad mit freier Kapazität seine Kosten echt senken.

Bezeichne:

- x entstehendes Routing
- ε Teil der Verkehrsteilnehmer
- R neuer Pfad, Q alter Pfad

Es gilt:

$$C^f(x) - C^f(f) = \varepsilon(\ell_R(f) - \ell_Q(f))$$

Nach Annahme: $\ell_R(f) < \ell_Q(f) \Longrightarrow C^f(x) < C^f(f)$. $\lightning$ $\square$

Effizienz von BMWs

Sei $\mathcal{L}$ Klasse von Latenzfunktionen, z. B. Polynome.

$$\beta(v,\ell) := \frac{1}{\ell(v)v} \cdot \max_{x\geq 0}\{x(\ell(v)-\ell(x))\} \text{ und } \beta(\mathcal{L}) := \sup_{\substack{v\geq 0\\ \ell\in\mathcal{L}}} \beta(v,\ell)$$

Satz

Gegeben sei ein Netzwerk mit Kapazitätsbeschränkungen mit Latenzfunktionen aus $\mathcal{L}$. Für ein BMW f gilt:

$$C(f) \leq \frac{1}{1-\beta(\mathcal{L})} \cdot C(\mathrm{SO})$$

Beweis (kurz):

$$C^f(x) \leq \sum_{a\in A} \max_{x\geq 0}\{\ell_a(f_a)x - \ell_a(x_a)x\} + \ell_a(x_a)x_a$$

$$= \sum_{a\in A} \beta(f_a,\ell_a)\cdot \ell_a(f_a)f_a + \ell_a(x_a)x_a \leq \beta(\mathcal{L})C(f) + C(x) \square$$

Effizienz von BMWs

Sei $\mathcal{L}$ Klasse von Latenzfunktionen, z. B. Polynome.

$$\beta(v,\ell) := \frac{1}{\ell(v)v} \cdot \max_{x\geq 0}\{x(\ell(v)-\ell(x))\} \text{ und } \beta(\mathcal{L}) := \sup_{\substack{v\geq 0\\ \ell\in\mathcal{L}}} \beta(v,\ell)$$

Satz

Gegeben sei ein Netzwerk mit Kapazitätsbeschränkungen mit Latenzfunktionen aus $\mathcal{L}$. Für ein BMW f gilt:

$$C(f) \leq \frac{1}{1-\beta(\mathcal{L})} \cdot C(\mathrm{SO})$$

Beweis (kurz):

$$\begin{aligned} C^f(x) &\leq \sum_{a\in A} \max_{x\geq 0}\{\ell_a(f_a)x - \ell_a(x_a)x\} + \ell_a(x_a)x_a \\ &= \sum_{a\in A} \beta(f_a,\ell_a)\cdot\ell_a(f_a)f_a + \ell_a(x_a)x_a \leq \beta(\mathcal{L})C(f) + C(x) \,\square \end{aligned}$$

Parameter $\beta(\mathcal{L})$ und $\alpha(\mathcal{L})$

Lemma

Es sei $\mathcal{L}$ Klasse von Latenzfunktion. Es sei ℓ diff'bar und $\ell(x)x$ konvex für alle $\ell \in \mathcal{L}$. Dann gilt:

$$\alpha(\mathcal{L}) = (1 - \beta(\mathcal{L}))^{-1}$$

Beweis durch Nachrechnen.

Folglich Erweiterung der Erkenntnisse von Roughgarden (2003) auf:

- Netzwerke mit Kapazitätsbeschränkungen
- Alle Klassen von Latenzfunktionen (wie bisher definiert)

Mit einfacheren Beweisen...

Berechnung von $\alpha(\mathcal{L}) = (1 - \beta(\mathcal{L}))^{-1}$

Lemma

Sei $\mathcal{L}$ Klasse von Latenzfunktionen. Es gebe $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass jedes $\ell \in \mathcal{L}$ die Ungleichung $\ell(cx) \geq s(c)\ell(x)$ für alle $c \in [0,1]$ erfüllt. Dann gilt:

$$\beta(\mathcal{L}) \leq \sup_{0 \leq x \leq 1} \{x(1 - s(x))\}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\beta(v, \ell) &= \max_{0 \leq x \leq v} \left\{ \frac{x}{v} \left(1 - \frac{\ell(x)}{\ell(v)} \right) \right\} = \max_{0 \leq x \leq v} \left\{ \frac{x}{v} \left(1 - \frac{\ell(\frac{x}{v} \cdot v)}{\ell(v)} \right) \right\} \\
&\leq \sup_{0 \leq x \leq v} \left\{ \frac{x}{v} \left(1 - \frac{s(\frac{x}{v})\ell(v)}{\ell(v)} \right) \right\} \qquad \text{nach Voraussetzung} \\
&= \sup_{0 \leq x \leq 1} \{x(1 - s(x))\}
\end{aligned}$$

$\square$

Berechnung von $\alpha(\mathcal{L}) = (1 - \beta(\mathcal{L}))^{-1}$

Lemma

Sei $\mathcal{L}$ Klasse von Latenzfunktionen. Es gebe $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass jedes $\ell \in \mathcal{L}$ die Ungleichung $\ell(cx) \geq s(c)\ell(x)$ für alle $c \in [0,1]$ erfüllt. Dann gilt:

$$\beta(\mathcal{L}) \leq \sup_{0 \leq x \leq 1} \{x(1 - s(x))\}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\beta(v, \ell) &= \max_{0 \leq x \leq v} \left\{ \frac{x}{v} \left(1 - \frac{\ell(x)}{\ell(v)} \right) \right\} = \max_{0 \leq x \leq v} \left\{ \frac{x}{v} \left(1 - \frac{\ell(\frac{x}{v} \cdot v)}{\ell(v)} \right) \right\} \\
&\leq \sup_{0 \leq x \leq v} \left\{ \frac{x}{v} \left(1 - \frac{s(\frac{x}{v})\ell(v)}{\ell(v)} \right) \right\} \qquad \text{nach Voraussetzung} \\
&= \sup_{0 \leq x \leq 1} \{x(1 - s(x))\}
\end{aligned}$$

□

α(Menge der Polynome n-ten Gerades)

Korollar

Seien $\mathcal{L}$ Menge von Latenzfunktionen, $n \in \mathbb{N}$. Ferner gelte für alle $\ell \in \mathcal{L}$: $\ell(cx) \geq c^n \cdot \ell(x)$ für alle $c \in [0,1]$. Dann gilt:

$$\alpha(\mathcal{L}) \leq \frac{(n+1)^{1+1/n}}{(n+1)^{1+1/n} - n}$$

Beweis. Setze $s(x) := x^n$. Nach vorherigem Lemma:

$$\begin{aligned}\beta(\mathcal{L}) &\leq \sup_{0 \leq x \leq 1} \{x(1-x^n)\} \\ &= \frac{n}{(n+1)^{1+1/n}}\end{aligned}$$

□

Beispiele (jeweils positive Koeffizienten):

- α(Menge linearer Funktionen) $= \frac{4}{3}$
- α(Menge Polynome 2-ten Gerades) $< 1{,}626$

α(Menge der Polynome n-ten Gerades)

Korollar

Seien $\mathcal{L}$ Menge von Latenzfunktionen, $n \in \mathbb{N}$. Ferner gelte für alle $\ell \in \mathcal{L}$: $\ell(cx) \geq c^n \cdot \ell(x)$ für alle $c \in [0, 1]$. Dann gilt:

$$\alpha(\mathcal{L}) \leq \frac{(n+1)^{1+1/n}}{(n+1)^{1+1/n} - n}$$

Beweis. Setze $s(x) := x^n$. Nach vorherigem Lemma:

$$\begin{aligned} \beta(\mathcal{L}) &\leq \sup_{0 \leq x \leq 1} \{x(1 - x^n)\} \\ &= \frac{n}{(n+1)^{1+1/n}} \end{aligned}$$

$\square$

Beispiele (jeweils positive Koeffizienten):

- α(Menge linearer Funktionen) $= \frac{4}{3}$
- α(Menge Polynome 2-ten Gerades) $< 1{,}626$

Zusammenfassung

Motivation: Modellierung von Verkehrsnetzen und -flüssen
Problem: Sind Nash-Equilibrien effizient?

Netzwerke ohne Kapazitätsbeschränkungen:

- Preis der Anarchie immer beschränkt
- Qualität der Equilibrien eindeutig
- Menge der Equilibrien konvex, nicht leer

Netzwerke mit Kapazitätsbeschränkungen:

- Preis der Anarchie bei BEKs unbeschränkt, bei BMWs immer beschränkt
- Qualität von BEKs unterschiedlich
- Menge von BEKs i. A. nicht konvex, nicht leer

Mit kleinen Modifikationen Ergebnisse übertragbar, wenn Latenzfunktionen nur noch linksstetig

Ausblick: Chau und Sim (2004): Nicht separable Latenzfunktionen

Zum Weiterlesen...

José R. Correa, Andreas S. Schulz & Nicolás E. Stier-Moses (2004).
Selfish Routing in Capacitated Networks.
Mathematics of Operations Research **29**(4), 961–976.
ISSN 0364-765X.

Tim Roughgarden (2003).
The price of anarchy is independent of the network topology.
Journal of Computer and System Sciences **67**(2), 341–364.
ISSN 0022-0000.
`http://dx.doi.org/10.1016/S0022-0000(03)00044-8`.

Tim Roughgarden & Éva Tardos (2002).
How bad is selfish routing?
J. ACM **49**(2), 236–259.
ISSN 0004-5411.
`http://doi.acm.org/10.1145/506147.506153`.