

# EIGENNÜTZIGES ROUTING IN NETZWERKEN MIT KAPAZITÄTSBESCHRÄNKUNGEN (NACH CORREA, SCHULZ UND STIER-MOSES)

*Projektgruppe SEROSE*

*Yvonne Bleischwitz, Rainer Feldmann, Burkhard Monien*

FLORIAN SCHOPPMANN

Wintersemester 2004/05

**Zusammenfassung.** Bei der Modellierung von Verkehrsnetzen nimmt man üblicherweise an, dass Verkehrsteilnehmer egoistisch handeln und nach der gegenwärtigen Verkehrssituation ihre Reiseroute wählen. Hierbei stellt sich nach einiger Zeit ein Gleichgewicht – ein Nash-Equilibrium – ein: Es entsteht eine Situation, in der kein Teilnehmer durch unilaterales Wechseln seines Weges eine Verbesserung seiner Reisezeit erzielen kann. Es ist jedoch bekannt, dass Nash-Equilibrien im Allgemeinen nicht effizient sind, also etwa im Fall von Verkehrsnetzen nicht per se zu einer Minimierung der Gesamtreisezeit beitragen.

In *Mathematics of Operations Research* 29(4):961–976, 2004, beschreiben Correa, Schulz und Stier-Moses, dass bestimmte Equilibrien nur um einen von den gewählten Latenzfunktionen abhängigen Faktor schlechter sind als das Systemoptimum. Hierbei werden vorherige Erkenntnisse erweitert, indem Kapazitätsbeschränkungen zugelassen werden und die Latenzfunktionen weder konvex, differenzierbar noch stetig sein müssen. Diese Seminararbeit weist im Vergleich zur Originalarbeit insbesondere ausführlichere Beweise auf.

**Stichworte.** Eigennütziges Routing, Netzwerk mit Kapazitätsbeschränkungen, Preis der Anarchie, Verkehrsnetz, Systemoptimum, Nash-Equilibrium, BMW-Equilibrium

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Modellierung</b>	<b>4</b>
2.1	Netzwerke ohne Kapazitätsbeschränkungen . . . . .	4
2.2	Ergebnisse vorheriger Arbeiten . . . . .	6
2.3	Braess' Paradoxon . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Netzwerke mit Kapazitätsbeschränkungen</b>	<b>9</b>
3.1	Eigenschaften von Benutzer-Equilibrien . . . . .	11
3.2	BMW-Equilibrium . . . . .	13
3.3	Preis der Anarchie bei BMW-Equilibrien . . . . .	17
3.4	Der Anarchie-Wert einer Menge von Latenzfunktionen . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Berechnung des höchstmöglichen Preises der Anarchie</b>	<b>22</b>
<b>5</b>	<b>Unstetige Latenzfunktionen</b>	<b>24</b>
5.1	Linksstetige Latenzfunktionen . . . . .	24
5.2	Allgemeine unstetige Latenzfunktionen . . . . .	26
<b>6</b>	<b>Fazit</b>	<b>27</b>

### 1. Einführung

Die Modellierung von Verkehrsnetzen hat in der Praxis vielfältige Anwendungen: Prominentestes Beispiel ist vermutlich der individuelle Straßenverkehr und dessen Planung. Charakteristisch hierbei ist das autonome Agieren der einzelnen Verkehrsteilnehmer, die in ihrer Routenplanung in der Regel nur indirekt beeinflussbar sind. Dennoch könnte etwa für den Straßenbau Bedarf bestehen, anhand simulierter Verkehrsflüsse Anforderungen für neue Verkehrswege zu ermitteln. Alternativ könnte Bedarf bestehen, anhand einer Modellierung Maut-Gebühren zu bestimmen, um auf diese Art und Weise Einfluss auf die individuelle Routenplanung zu nehmen – etwa mit dem Ziel einer gleichmäßigeren Ausnutzung der vorhandenen Verkehrswege. Ein anderes Beispiel ist die Datenübertragung in dezentralen Netzwerken wie dem Internet, bei der man annimmt, Pakete „suchen“ autonom ihren Weg vom Sender zum Empfänger.

Beide gegebenen Beispiele haben gemeinsam, dass in der Praxis die Reisezeit beziehungsweise Übertragungszeit von einem Ort zu einem anderen üblicherweise mit zunehmendem Fluss auf dieser Strecke ebenfalls anwächst. Dabei nimmt man an, dass Verkehrsteilnehmer anhand der aktuellen Verkehrssituation ihre Route so

wählen, dass sie selbst möglichst kurze Reisezeit unter den aktuellen Verkehrsbedingungen haben. Eine gewisse Aufwärmphase vorausgesetzt, ergibt sich so nach einiger Zeit ein Gleichgewicht, in dem kein Verkehrsteilnehmer mehr durch unilaterale Änderung seiner Route einen Gewinn erzielen kann. In früheren Arbeiten wurde gezeigt, dass in tatsächlichen städtischen Verkehrssituationen die beobachteten Verkehrsflüsse tatsächlich näher an einer solchen Verkehrsaufteilung liegen als etwa an einer Aufteilung, die die Gesamtreisezeit minimiert.

So formulierte etwa [Wardrop 1952](#) zwei Prinzipien, welche den Begriff dieses Gleichgewichts und – als alternatives Ziel – die Minimierung der Gesamtreisezeit charakterisieren. Sein erstes Prinzip lautet:

The journey times on all the routes actually used are equal, and less than those which would be experienced by a single vehicle on any unused route.

Zugrunde liegt das Konzept von sogenannten *Nash-Equilibrien*: Sie beschreiben einen Zustand aus der Spieltheorie, bei der jeder Spieler seine Strategie unter der Voraussetzung optimal gewählt hat, dass alle anderen Spieler an ihrer Strategie festhalten. Erstmals in dieser Form beschrieben wurde dieses Konzept von [Nash \(1951\)](#).

In Verkehrsnetzen werden Verkehrsaufteilungen nach Wardrops erstem Prinzip üblich als *Benutzer-Equilibrium* bezeichnet. Das Systemoptimum wird durch Wardrops zweites Prinzip beschrieben:

The average journey time is a minimum.

Es ist dabei nicht überraschend, dass ein Benutzer-Equilibrium im Allgemeinen kein Systemoptimum ist – wie im nächsten Abschnitt auch an einem Beispiel gezeigt wird. Verlangt man jedoch die Linearität der *Latenzfunktionen*, welche die Reisezeiten von einem Ort zu einem anderen anhand des Verkehrsaufkommens beschreiben, so zeigen [Roughgarden & Tardos \(2002\)](#), dass die Gesamtreisezeit eines Benutzer-Equilibriums maximal  $\frac{4}{3}$  der eines Systemoptimums betragen kann. Ferner beweist [Roughgarden \(2003\)](#), dass dieses Verhältnis sogar bei einer viel größeren Menge von Latenzfunktionen *immer* unabhängig vom Verkehrsnetz ist (und ausschließlich von den gewählten Latenzfunktionen abhängt).

Diese Seminararbeit zeigt Erweiterungen dieser Erkenntnisse auf, wie sie von [Correa et al. \(2004\)](#) beschrieben werden: Betrachtet man nur Equilibrien mit minimaler Reisezeit (also die besten Benutzer-Equilibrien), so lassen sich konstante Schranken für das zuvor erwähnte Verhältnis aufrecht erhalten, selbst wenn man Kapazitätsbeschränkungen auf den einzelnen Verkehrswegen einführt. Für einige Ergebnisse von [Roughgarden & Tardos \(2002\)](#) und [Roughgarden \(2003\)](#) werden ferner einfachere Beweise gegeben, die zudem schwächere Voraussetzungen haben.

## 2. Modellierung

**2.1. Netzwerke ohne Kapazitätsbeschränkungen.** Das grundlegende Modell eines Verkehrsnetzes wird wie folgt definiert.

DEFINITION 2.1. *Ein Netzwerk (ohne Kapazitätsbeschränkungen) ist ein aus folgenden Komponenten bestehendes Modell:*

- Ein gerichtetes Netzwerk  $D = (N, A)$  von Knoten (Nodes) und Kanten (Arcs)
- Eine Menge  $K \subseteq N \times N$  von Start-Ziel (OD) Paaren
- Für jedes OD-Paar  $k \in K$ : Ein (beliebig teilbarer) Fluss  $d_k$ , der vom Start zum Ziel geroutet werden muss – im Folgenden Bedarf genannt.
- Für jede Kante  $a \in A$ : Eine nicht-negative, monoton wachsende und stetige Latenzfunktion  $\ell_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ . Dabei gibt  $\ell_a(x)$  die Zeit an, die zum Traversieren von  $a$  benötigt wird, wenn  $x$  der Fluss auf  $a$  ist.

Aufgrund der Anzahl eingeführter Bezeichnungen werden diese im Rest der Arbeit – sofern eindeutig – nicht erneut explizit als Voraussetzung angegeben, sondern wie in [Definition 2.1](#) verwendet.

Sei also ein Netzwerk ohne Kapazitätsbeschränkungen gegeben. Für  $k \in K$ , bezeichne  $\mathcal{P}_k$  die Menge aller einfachen Pfade in  $D$  vom Start zum Ziel. Ferner sei  $\mathcal{P} := \cup_{k \in K} \mathcal{P}_k$ . Es bezeichne  $f_P$  den Fluss auf einem Pfad  $P$ .

DEFINITION 2.2. *Sei ein Netzwerk ohne Kapazitätsbeschränkungen gegeben. Ein Routing ist ein nicht-negativer Vektor  $f = (f_P)_{P \in \mathcal{P}}$ . Dabei heißt das Routing  $f$  zulässig, wenn es den Bedarf erfüllt:*

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_k} f_P = d_k \quad \text{für alle } k \in K$$

BEMERKUNG 2.3. [Correa et al. \(2004\)](#) verwenden für ein Routing den Begriff path flow, für den Fluss auf einer Kante die Bezeichnung arc flow. Um die Unterscheidung zu vereinfachen, sind in dieser Arbeit unterschiedliche Begriffe gewählt worden.

Es werden einige weitere Festlegungen benötigt: Sei  $f$  ein Routing. Der Fluss auf einer Kante  $a \in A$  wird mit  $f_a$  bezeichnet und lässt sich errechnen durch:

$$f_a = \sum_{\substack{P \in \mathcal{P} \\ a \in P}} f_P$$

Die Reisezeit entlang eines Pfades  $P$  ist definiert als:

$$\ell_P(f) := \sum_{a \in P} \ell_a(f_a)$$

Die Gesamtreisezeit eines Routings errechnet sich damit als:

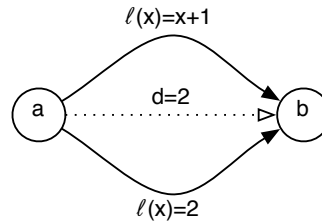
$$C(f) := \sum_{P \in \mathcal{P}} \ell_P(f) f_P$$

Einsetzen und Umstellen der Summe ergibt eine alternative Darstellung:

$$\begin{aligned} (2.4) \quad C(f) &= \sum_{P \in \mathcal{P}} \ell_P(f) f_P = \sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{a \in P} \ell_a(f_a) f_P \\ &= \sum_{a \in A} \sum_{\substack{P \in \mathcal{P} \\ a \in P}} \ell_a(f_a) f_P = \sum_{a \in A} \ell_a(f_a) \sum_{\substack{P \in \mathcal{P} \\ a \in P}} f_P \\ &= \sum_{a \in A} \ell_a(f_a) f_a \end{aligned}$$

Dabei gilt Gleichheit (2.4), da die zweite Summation nur über Pfade mit  $a \in P$  erfolgt. Zur Betrachtung von Equilibrien wird später die Kostenfunktion  $C^f(x)$  mit konstanten Reisezeiten benötigt, wobei  $f$  ein zulässiges Routing ist. Es wird definiert:  $C^f(x) := \sum_{a \in A} \ell_a(f_a) x_a$ . Damit gilt natürlich  $C^f(f) = C(f)$ .

BEISPIEL 2.5. [Figur 2.1](#) zeigt ein sehr einfaches Netzwerk, das die Definitionen verdeutlicht.



FIGUR 2.1: Einfaches Netzwerk ohne Kapazitätsbeschränkungen

Einziges OD-Paar ist  $k := (a, b)$  mit einem Bedarf  $d_k = 2$ . Die obere Kante sei mit  $a_1$  bezeichnet, die untere mit  $a_2$ . Offensichtlich enthält auch  $\mathcal{P}$  nur zwei Pfade  $P_1$  und  $P_2$ , die jeweils über eine der beiden Kanten führen. Folglich ist jedes Routing ein 2-Tupel  $(f_{P_1}, f_{P_2})$ . Für jedes zulässige Routing muss dabei gelten:  $f_{P_1} + f_{P_2} = d_k = 2$ . Sei etwa  $f := (1, 1)$ . Dann beträgt die Gesamtreisezeit:

$$C(f) = \ell_{a_1}(1) \cdot 1 + \ell_{a_2}(1) \cdot 1 = (1 + 1) \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 4$$

Man stellt fest, dass bei diesem Routing die Reisezeiten auf allen Pfaden gleich sind. Nach Wardrops erstem Prinzip ist  $f$  also ein Benutzer-Equilibrium.  $\diamond$

Gemäß Wardrops zweitem Prinzip minimiert ein Systemoptimum die Gesamt-reisezeit  $C(\cdot)$  und ist demzufolge Lösung des folgenden nicht-linearen Optimierungsproblems:

$$(2.6a) \quad \min \sum_{a \in A} \ell_a(f_a) f_a$$

$$(2.6b) \quad \text{so dass } \sum_{\substack{P \in \mathcal{P} \\ a \in P}} f_P = f_a \quad \text{für alle } a \in A,$$

$$(2.6c) \quad \sum_{P \in \mathcal{P}_k} f_P = d_k \quad \text{für alle } k \in K,$$

$$(2.6d) \quad f_P \geq 0 \quad \text{für alle } P \in \mathcal{P}.$$

**2.2. Ergebnisse vorheriger Arbeiten.** Geben sei wieder ein Netzwerk ohne Kapazitätsbeschränkungen. Es ist bekannt:

1. Ein Routing  $f$  ist ein Benutzer-Equilibrium genau dann, wenn:

$$\sum_{a \in P} \ell_a(f_a) \leq \sum_{a \in Q} \ell_a(f_a) \quad \text{für alle } k \in K, P, Q \in \mathcal{P}_k, f_P > 0$$

Mit anderen Worten:  $f$  ist Equilibrium genau dann, wenn die Reisezeit entlang eines jeden benutzten Pfades zu einem OD-Paar  $k$  nicht größer ist als die Reisezeit entlang eines beliebigen anderen Pfades zu  $k$ . Dies ist eine Formalisierung von Wardrops erstem Prinzip.

2. Ein Routing  $f$  ist ein Benutzer-Equilibrium genau dann, wenn für jedes Routing  $x$  gilt:

$$(2.7) \quad C^f(f) \leq C^f(x)$$

Dies ist leicht einsehbar, da bei einem Benutzer-Equilibrium alle Benutzer die günstigsten Pfade in Bezug auf die Kantentraversierungszeiten  $\ell_a^f(\cdot)$  gewählt haben.

3. Ein Benutzer-Equilibrium existiert immer und hat eine eindeutig bestimmte Gesamt-reisezeit – auch wenn mehrere Equilibrien existieren. Die Menge der Benutzer-Equilibrien ist Lösungsmenge des nicht-linearen Optimierungsproblems (2.6a) – (2.6d), bei dem (2.6a) durch  $\sum_{a \in A} \int_0^{f_a} \ell_a(x) dx$  ersetzt wird. Die Berechnung ist effizient möglich, da  $(x_a)_{a \in A} \mapsto \sum_{a \in A} \int_0^{f_a} \ell_a(x) dx$  konvex ist. Vergleiche Beckmann *et al.* (1956).

4. Wenn  $\ell_a$  differenzierbar ist und  $x \mapsto \ell_a(x)x$  konvex für alle  $a \in A$ , dann gilt: Ein Routing  $f^*$  ist genau dann optimal, wenn:

$$\forall k \in K, P, Q \in \mathcal{P}_k, f^* > 0 : \sum_{a \in P} \ell_a^*(f_a^*) \leq \sum_{a \in Q} \ell_a^*(f_a^*)$$

Hierbei bezeichnet  $\ell_a^*(x) := \ell_a(x) + \ell'_a(x)x = \frac{d}{dz}(\ell_a(z)z) \Big|_{z=x}$  die *Grenzkosten* auf Kante  $a$  bei Fluss  $x$  auf dieser Kante. Ein Systemoptimum ist also ein Benutzer-Equilibrium in einem modifizierten Netzwerk, bei dem die Latenzfunktionen durch ihre Grenzkosten ersetzt wurden. Vergleiche beispielsweise [Roughgarden \(2003, Propositions 2.2, 2.7\)](#).

Sind alle Latenzfunktionen in einem Netzwerk linear, so zeigen [Roughgarden & Tardos \(2002\)](#), dass die Gesamtzeit eines Benutzer-Equilibriums nahe beim Systemoptimum liegt. [Correa et al. \(2004\)](#) geben einen einfacheren Beweis an:

**SATZ 2.8** ([Roughgarden & Tardos 2002](#)). *Seien  $f$  ein Benutzer-Equilibrium und  $f^*$  ein Systemoptimum in einem Netzwerk mit linearen Latenzfunktionen. Dann gilt  $C(f) \leq \frac{4}{3}C(f^*)$ .*

**BEWEIS.** Sei  $x$  ein beliebiges zulässiges Routing. Nach Voraussetzung lässt sich jede Latenzfunktion  $\ell_a(x)$  darstellen als  $q_a \cdot x + r_a$  mit  $q_a, r_a \geq 0$ . Dann:

$$\begin{aligned} C(f) &= C^f(f) \leq C^f(x) \quad \text{nach (2.7)} \\ &= \sum_{a \in A} (q_a f_a + r_a) x_a = \sum_{a \in A} (q_a f_a x_a + r_a x_a) \\ (2.9) \quad &\leq \sum_{a \in A} \left[ q_a \left( x_a^2 + \frac{1}{4} f_a^2 \right) + r_a x_a \right] = \sum_{a \in A} (q_a x_a + r_a) x_a + \frac{1}{4} \sum_{a \in A} q_a f_a^2 \\ &\leq C(x) + \frac{1}{4} \sum_{a \in A} (q_a f_a + r_a) f_a \\ &= C(x) + \frac{1}{4} C(f) \end{aligned}$$

Es gilt Ungleichung (2.9), da nach Voraussetzung  $q_a \geq 0$  und zudem:

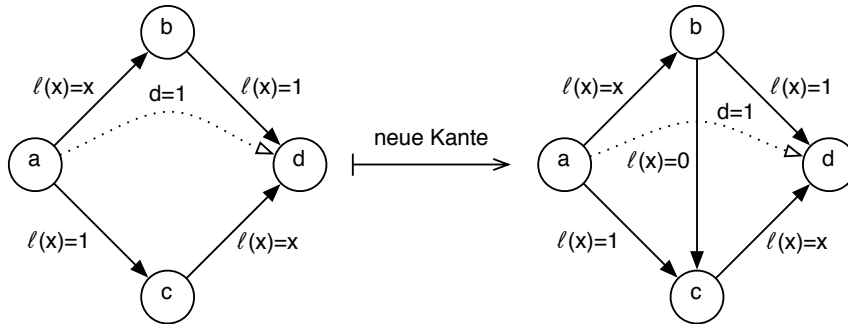
$$x_a^2 + \frac{1}{4} f_a^2 \geq f_a x_a \Leftrightarrow (x_a - f_a/2)^2 \geq 0$$

Subtraktion von  $\frac{1}{4}C(f)$  ergibt schließlich  $\frac{3}{4}C(f) \leq C(x)$  für jedes zulässige Routing  $x$ . Einsetzen eines Systemoptimums  $f^*$  liefert die Behauptung.  $\square$

In einem Netzwerk wird das größtmögliche Verhältnis zwischen der Gesamtzeit eines Nash-Equilibriums und der eines Systemoptimums von [Roughgarden \(2003\)](#) als *Preis der Anarchie* bezeichnet. Die Aussage von [Satz 2.8](#) lässt sich also so umformulieren, dass der Preis der Anarchie für lineare Latenzfunktionen unabhängig vom Netzwerk nach oben durch  $\frac{4}{3}$  beschränkt ist.

**2.3. Braess' Paradoxon.** In diesem Abschnitt wird ein Beispiel für ein Netzwerk ohne Kapazitätsbeschränkungen gegeben, das den Begriff des Benutzer-Equilibriums verdeutlicht. Ferner war es Braess' Paradoxon, so schreiben [Roughgarden & Tardos \(2002, Seite 239\)](#), das viele Arbeiten auf diesem Gebiet inspirierte.

BEISPIEL 2.10 (Braess' Paradoxon). Das in [Figur 2.2](#) abgebildete Netzwerk ohne Kapazitätsbeschränkungen illustriert, dass Benutzer-Equilibrien nicht optimal sein müssen.



FIGUR 2.2: Braess' Paradoxon

Es ist ein Fluss von 1 von  $a$  nach  $d$  zu routen. Offensichtlich gibt es genau zwei Pfade  $P_1, P_2$  von  $a$  nach  $d$ :  $P_1 := (a, b, d)$  und  $P_2 := (a, c, d)$ . Einziges OD-Paar ist  $(a, d)$ , so dass also auch  $\mathcal{P} = \{P_1, P_2\}$ . Nach Definition für die Kosten eines Routings  $f = (f_{P_1}, f_{P_2})$  gilt:

$$\begin{aligned} C(f) &= \sum_{P \in \mathcal{P}} \ell_P(f) f_P = \ell_{P_1}(f) f_{P_1} + \ell_{P_2}(f) f_{P_2} \\ &= (f_{P_1} + 1) f_{P_1} + (1 + f_{P_2}) f_{P_2} = f_{P_1}^2 + f_{P_1} + f_{P_2}^2 + f_{P_2} \end{aligned}$$

Ferner muss gelten:  $f_{P_1} + f_{P_2} = 1$ .

Das Systemoptimum kann man mit Mitteln der Analysis berechnen: Offensichtlich sind  $x := f_{P_1}$  und  $y := f_{P_2}$  Parameter für eine Funktion  $g(x, y) := x + y - 1$ , auf deren Nullstellenmenge das Minimum von  $h(x, y) := x^2 + x + y^2 + y$  gesucht ist. Denn:  $g$  ist implizit durch die Bedingung  $y = 1 - x$  definierte Funktion. Also:

$$\min_{\substack{g(x,y)=0 \\ x,y \in [0,1]}} \{h(x, y)\} = \min_{x \in [0,1]} \{h(x, 1 - x)\}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} h(x, 1 - x) &= x^2 + x + (1 - x)^2 + (1 - x) = 2x^2 - 2x + 2 \quad \text{und} \\ \frac{d}{dx} h(x, 1 - x) &= 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$



Man überzeugt sich leicht, dass die notwendige Bedingung  $x = \frac{1}{2}$  auch hinreichend für ein lokales (und auch globales) Minimum auf  $[0, 1]$  ist. Dementsprechend wird  $C(\cdot)$  durch das Routing  $f = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  minimiert und es gilt  $C(f) = \frac{3}{2}$ . Dies ist offensichtlich auch ein Benutzer-Equilibrium, da die Reisezeit auf jedem benutzten Pfad nicht größer als auf irgendeinem anderen Pfad des gleichen OD-Paares ist.

Das Hinzufügen einer Kante, wie in [Figur 2.2](#) dargestellt, kann intuitiv als nützlich angesehen werden. Nachrechnen ergibt jedoch, dass das Systemoptimum nicht verbessert wird – schlechter kann es offensichtlich nicht werden.

Das Benutzer-Equilibrium verschlechtert sich allerdings: Der Pfad  $(a, b, c, d)$  weist jeweils so lange niedrigere Reisezeit als  $(a, b, d)$  und  $(a, c, d)$  auf, bis der gesamte Fluss diesen längeren Pfad benutzt. Dann jedoch beträgt die Gesamtreisezeit  $2 > \frac{3}{2}$ . Demnach ist Braess' Paradoxon auch ein Beispiel dafür, dass Benutzer-Equilibrien nicht optimal sein müssen: Der Preis der Anarchie ist  $2/\frac{3}{2} = \frac{4}{3}$ .  $\diamond$

Andererseits wurde mit [Satz 2.8](#) gezeigt, dass bei ausschließlich linearen Latenzfunktionen der Faktor  $\frac{4}{3}$  eine obere Schranke für das Verhältnis der Gesamtreisezeit eines Benutzer-Equilibriums zu der einer optimalen Lösung darstellt. Das Beispiel stellt insofern ein „Worst-Case“ Szenario dar.

### 3. Netzwerke mit Kapazitätsbeschränkungen

Die Latenzfunktionen  $\ell_a$  im bisherigen Modell bilden die Verkehrsdichte auf einer Verbindung (Kante)  $a$  ab auf die durchschnittliche Reisezeit zum Traversieren. [Correa et al. \(2004\)](#) erwähnen die Ergebnisse einiger älterer Arbeiten, in denen herausgestellt wurde, dass das bisherige Modell in Teilen unrealistisch ist: Prinzipiell können über Verbindungen unbegrenzte Mengen von Verkehr fließen – die Kanten haben also unbegrenzte Kapazitäten.

In der Praxis ist es oft aber wünschenswert, Kapazitäten zu modellieren. Eine Behelfsmöglichkeit stellen Latenzfunktionen dar, die gegen unendlich streben, wenn der Verkehrsfluss sich der Kapazität annähert. Als problematisch wurden in früheren Arbeiten aber auch hier asymptotisch unrealistisch hohe Reisezeiten sowie eine numerisch ungünstige Problemstellung gezeigt.

Daher werden im Folgenden explizite Kapazitäten eingeführt. Dazu wird das Modell aus [Abschnitt 2.1](#) wie folgt erweitert:

**DEFINITION 3.1.** (i) Ein Netzwerk mit Kapazitätsbeschränkungen ist eine aus folgenden Bestandteilen bestehende Modellierung:

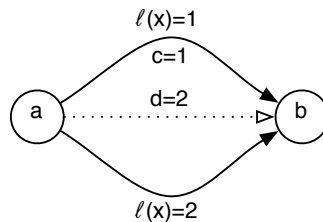
- Ein Netzwerk ohne Kapazitätsbeschränkungen, wie in [Definition 2.1](#).
- Für jede Kante  $a \in A$ : Eine Kapazitätsbeschränkung  $c_a$ .

Die übrigen Definitionen gelten analog.

- (ii) Ein Routing  $f$  für ein Netzwerk mit Kapazitätsbeschränkungen heißt zulässig, falls es zulässig nach [Definition 2.1](#) ist und zusätzlich  $f_a \leq c_a$  für alle  $a \in A$  gilt.
- (iii) Ein Pfad  $P \in \mathcal{P}$  heißt ungesättigt bezüglich eines Routings  $f$  genau dann, wenn  $f_a < c_a$  für alle  $a \in P$ . Andernfalls heißt  $P$  gesättigt.

Im Rest der Arbeit werden der Einfachheit halber nur Netzwerke mit Kapazitätsbeschränkungen betrachtet, die ein zulässiges Routing besitzen, also *erfüllbar* sind. Bei der neuen Definition stellt sich die Frage, wie nun ein Benutzer-Equilibrium zu definieren ist. Offensichtlich wird mit Kapazitätsbeschränkungen Wardrops erstes Prinzip nicht mehr erfüllt: [Figur 3.1](#) zeigt ein einfaches Netzwerk mit Kapazitätsbeschränkungen, für das das Routing  $(1, 1)$  ein Nash-Equilibrium darstellt. Bei diesem Routing könnte kein Verkehrsteilnehmer durch unilaterales Wechseln seiner Route die Reisezeit verbessern. Die Reisezeiten auf den einzigen beiden Pfaden sind dabei allerdings verschieden.

Hier und im Folgenden wird in Abbildungen die Angabe von Kapazitätsbeschränkungen  $c_a$  weggelassen, wenn  $c_a = \infty$  gilt.



FIGUR 3.1: Einfaches Netzwerk mit Kapazitätsbeschränkungen

**DEFINITION 3.2.** Ein Routing  $f$  ist ein Benutzer-Equilibrium mit Kapazitätsbeschränkungen, wenn kein OD-Paar einen ungesättigten Pfad mit echt kleinerer Reisezeit hat als irgendein anderer für dieses Paar benutzter Pfad. Das heißt formal: Für alle  $k \in K$  und  $P \in \mathcal{P}_k$  gilt:  $f_P > 0 \Rightarrow \ell_P(f) \leq \min\{\ell_Q(f) \mid Q \in \mathcal{P}_k \text{ ungesättigt}\}$ .

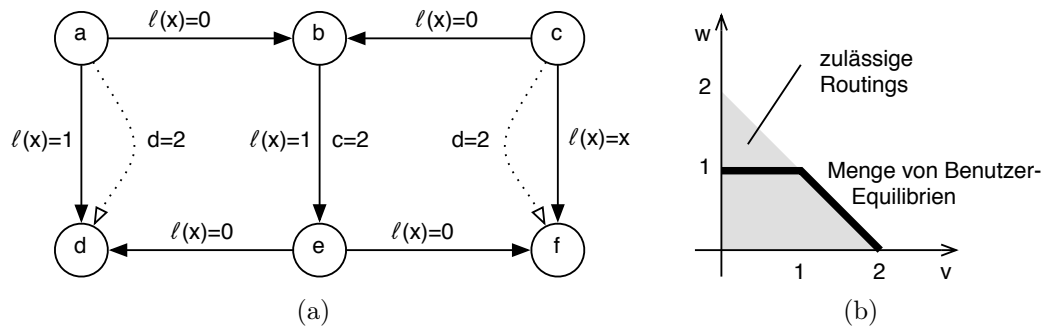
Man beachte, dass die Definition eine echte Erweiterung ist: Im Modell ohne Kapazitätsbeschränkungen ist sie offensichtlich äquivalent zu Wardrops erstem Prinzip, da jede Kante ungesättigt ist.

Sei  $L_k(f) := \max\{\ell_P(f) \mid P \in \mathcal{P}_k \text{ und } f_P > 0\}$ . Dann erfüllt ein Routing  $f$  folgende Bedingungen: Wenn  $\ell_P(f) > L_k(f)$ , muss  $f_P = 0$  gelten, da  $L_k(f)$  maximal gewählt wurde. Wenn  $\ell_P(f) < L_k(f)$ , dann ist  $P$  gesättigt, denn alle ungesättigten Pfade haben wie zuvor die gleiche Reisezeit  $L_k(f)$ . Jeder Pfad in  $\mathcal{P}_k$  gehört also einer von drei Klassen an:

- Den „schnellen“, aber saturierten Pfaden,
- den Pfaden mit Reisezeit  $L_k(f)$  oder
- den „langsamen“ und daher unbenutzten Pfaden.

**3.1. Eigenschaften von Benutzer-Equilibrien.** Wie zuvor gesehen, haben alle Benutzer-Equilibrien in einem Netzwerk ohne Kapazitätsbeschränkungen die gleiche Gesamtreisezeit. Im Falle, dass Kapazitätsbeschränkungen gegeben sind, ist dies im Allgemeinen nicht mehr der Fall. Ein Beispiel soll dies verdeutlichen.

BEISPIEL 3.3. Betrachte das in [Figur 3.2 \(a\)](#) gezeigte Netzwerk mit Kapazitätsbeschränkungen.



FIGUR 3.2: Netzwerk mit verschiedenen Benutzer-Equilibrien

Die beiden OD-Paare sind  $k_1 := (a, d)$  und  $k_2 := (c, f)$ . Die Menge der Pfade für  $k_1$  ist:  $\mathcal{P}_{k_1} = \{(a, d), (a, b, e, d)\}$ . Analog:  $\mathcal{P}_{k_2} = \{(c, f), (c, b, e, f)\}$ . Ein Routing  $f$  ist also ein 4-Tupel:  $f = (f_P)_{P \in \mathcal{P}}$ . Aufgrund der Voraussetzungen  $d_{k_1} = d_{k_2} = 2$  und da für jedes OD-Paar genau 2 Pfade existieren, existiert eine Bijektion aller zulässigen Routings auf die Menge  $R := \{(v, w) \in [0, 2] \mid v + w \leq 2\}$ . Hierbei gibt  $v = f_{(a,b,e,d)}$  den Fluss von  $a$  nach  $d$  über die mittlere Kante an,  $w = f_{(c,b,e,f)}$  entsprechend den Fluss von  $c$  nach  $f$  über die mittlere Kante. Die Flüsse auf  $(a, d)$  und  $(c, f)$  ergeben sich offenbar durch  $2 - v$  beziehungsweise  $2 - w$ .

Gemäß [Definition 3.2](#) entspricht  $(v, w) \in R$  einem Benutzer-Equilibrium mit Kapazitätsbeschränkungen genau dann, wenn

- $w = 1$ , denn dann sind die Reisezeiten von  $c$  nach  $f$  über beide Pfade gleich.
- $v + w = 2$  und  $w < 1$ , denn dann ist jeder Pfad über die mittlere Kante saturiert. Durch  $w < 1$  ist sichergestellt, dass der unsaturierte Pfad  $(c, f)$  geringere Kosten hat als  $(c, b, e, f)$ .

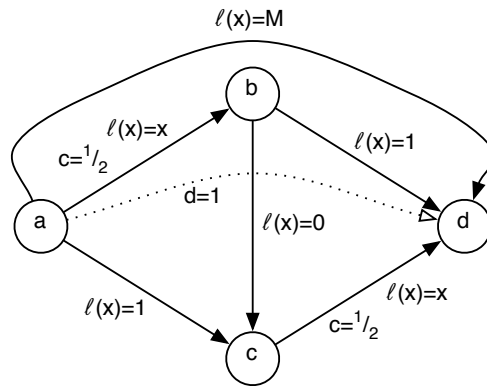
Nachrechnen ergibt: Die Gesamtreisezeit für ein Routing  $f$  – repräsentiert durch  $(v, w) \in R$  – beträgt:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} (2-v) \cdot 1 + v \cdot 1 + w \cdot 1 + (2-w) \cdot (2-w) &= 2 + w + (2-w)^2 \\ &= w^2 - 3w + 6 \end{aligned}$$

Es gibt also unendlich viele Benutzer-Equilibrien von unterschiedlicher Qualität. [Figur 3.2 \(b\)](#) illustriert, dass ihre Menge nicht einmal konvex sein muss.  $\diamond$

Im vorangegangenen Beispiel legt [\(3.4\)](#) die Vermutung nahe, dass der Preis der Anarchie beliebig hoch werden kann. Ein weiteres Beispiel demonstriert dies:

BEISPIEL 3.5. [Figur 3.3](#) zeigt ein Netzwerk mit Kapazitätsbeschränkungen.



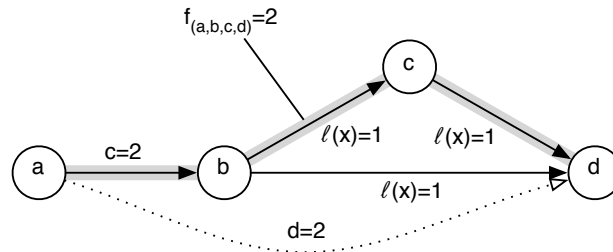
FIGUR 3.3: Netzwerk mit Preis der Anarchie größer als  $\frac{1}{2}M$

Es sei  $f$  Routing mit Fluss  $\frac{1}{2}$  sowohl auf Pfad  $(a, b, c, d)$  als auch auf  $(a, d)$ . Man sieht, dass dabei auf  $(a, b, c, d)$  die Reisezeit  $\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} = 1$  beträgt. Auf  $(a, d)$  ist die Reisezeit stets  $M$ . Auf den anderen beiden Pfaden gibt es keinen Fluss. Folglich ist für  $M \geq 1$  die Reisezeit auf  $(a, d)$  größer oder gleich der auf  $(a, b, c, d)$ , so dass es keinen unsaturierten Pfad gibt, der echt kleinere Reisezeit hat als irgendein anderer für dieses Paar benutzter Pfad. Damit ist  $f$  Benutzer-Equilibrium mit Gesamtreisezeit  $C(f) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}M$ .

Das Routing  $g$  mit Fluss von jeweils  $\frac{1}{2}$  auf  $(a, b, d)$  und  $(a, c, d)$  hat Gesamtreisezeit von offensichtlich nur  $\frac{1}{2}(\frac{1}{2} + 1) + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$ . Folglich kann der Preis der Anarchie beliebig groß werden, wenn  $M \rightarrow \infty$ .  $\diamond$

BEMERKUNG 3.6. Nach [Definition 3.2](#) kann die Situation entstehen, dass Reisende auf einem längeren Pfad zur Saturierung eines schnelleren Pfades mit einem gemeinsamen Teilpfad beitragen. Ein Beispiel wird in [Abbildung 3.4](#) gegeben.

Offensichtlich handelt es sich um ein *Equilibrium*, da es keine ungesättigten Pfade von  $a$  nach  $d$  gibt.



FIGUR 3.4: „Unnatürliches“ *Equilibrium* mit Kapazitätsbeschränkungen

Um derartige „unnatürlich“ *Equilibria* auszuschließen, wäre eine alternative Definition eines Benutzer-*Equilibrium* mit Kapazitätsbeschränkungen denkbar:

Kein beliebig kleiner Teil von Reisenden auf gleichem Pfad kann seine Reisezeit durch Wechseln auf einen anderen Pfad verkleinern.

Formal ließe sich diese alternative Definition wie folgt formulieren: Sei  $f$  ein Routing. Ferner:

$$(3.7) \quad f_P^\epsilon := \begin{cases} f_Q - \epsilon & \text{wenn } P = Q \\ f_R + \epsilon & \text{wenn } P = R \\ f_P & \text{sonst} \end{cases}$$

Wenn dann für alle OD-Paare  $k \in K$ , alle  $Q, R \in \mathcal{P}_k$  mit  $f_Q > 0$  und alle  $\bar{\epsilon} > 0$  gilt, dass  $\ell_R(f^\epsilon) \geq \ell_Q(f)$  oder  $f^\epsilon$  kein zulässiges Routing ist, so ist  $f$  Benutzer-*Equilibrium*.

Man stellt fest, dass die alternative Definition einschränkender als [Definition 3.2](#) ist. Die Menge der *Equilibria* ist eine echte Teilmenge. [Beispiel 3.3](#) und [Beispiel 3.5](#) würden aber weiterhin gelten.

**3.2. BMW-Equilibrium.** Die (effiziente) Berechnung eines Benutzer-*Equilibrium* mit Kapazitätsbeschränkungen scheint naheliegend: Dem in [Abschnitt 2.2](#) unter 3. beschriebenen Optimierungsproblem – nach [Beckmann et al. \(1956\)](#) – werden die

Kapazitäten als zusätzliche Nebenbedingungen hinzugefügt. Es ergibt sich:

$$(3.8a) \quad \min \sum_{a \in A} \int_0^{f_a} \ell_a(x) dx$$

$$(3.8b) \quad \text{so dass} \quad \sum_{\substack{P \in \mathcal{P} \\ a \in P}} f_P = f_a \quad \text{für alle } a \in A,$$

$$(3.8c) \quad \sum_{P \in \mathcal{P}_k} f_P = d_k \quad \text{für alle } k \in K,$$

$$(3.8d) \quad f_a \leq c_a \quad \text{für alle } a \in A,$$

$$(3.8e) \quad f_P \geq 0 \quad \text{für alle } P \in \mathcal{P}.$$

Nach Voraussetzung sind die  $\ell_a$  monoton wachsende stetige Funktionen. Dementsprechend beschreibt das Optimierungsproblem eine Minimierung einer konvexen Funktion über einem (nicht leeren) Polytop. Die Lösungsmenge ist also ebenfalls nicht leer und konvex.

**DEFINITION 3.9.** *Eine optimale Lösung des durch (3.8a) – (3.8e) gegebenen Optimierungsproblems heißt Beckmann, McGuire & Winsten- beziehungsweise im Folgenden nur noch kurz BMW-Equilibrium.*

Man beachte, dass ein BMW-Equilibrium nicht notwendigerweise ein Equilibrium mit minimaler Gesamtreisezeit sein muss. Es ist an dieser Stelle nicht einmal per se klar, dass ein BMW-Equilibrium überhaupt ein Benutzer-Equilibrium mit Kapazitätsbeschränkungen ist. Sowohl der Nachweis hierfür als auch eine a posteriori Rechtfertigung für die Wahl der Definition wird im Folgenden erbracht. Es wird gezeigt, dass ein BMW-Equilibrium einige nützliche Eigenschaften aufweist.

**LEMMA 3.10.** *Ein zulässiges Routing  $f$  ist ein BMW-Equilibrium in einem Netzwerk mit Kapazitätsbeschränkungen genau dann, wenn für jedes zulässige Routing  $x$  gilt:*

$$C^f(f) \leq C^f(x)$$

**BEWEIS.** Es bezeichne  $D \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}^{|A|}$  die Menge aller zulässigen Routings, die die Nebenbedingungen (3.8b) – (3.8e) erfüllen. Wie zuvor gesehen, ist  $D$  ein Polytop und somit konvex. Ferner sei  $\gamma : \mathbb{R}_{\geq 0}^{|A|} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  definiert als:

$$\gamma((x_a)_{a \in A}) := \sum_{a \in A} \int_0^{x_a} \ell_a(z) dz$$

Dann gilt offensichtlich: Der Gradient von  $\gamma$  an einer Stelle  $x := (x_a)_{a \in A}$  ist  $\nabla \gamma(x) = (\ell_a(x_a))_{a \in A}$ . Als Richtungsableitung in Richtung  $h := (h_a)_{a \in A}$  an Stelle  $x$  ergibt sich somit:

$$\left\langle (\ell_a(x_a))_{a \in A}, \frac{h}{\|h\|_2} \right\rangle = \frac{1}{\|h\|_2} \sum_{a \in A} h_a \ell_a(x_a)$$

„ $\Rightarrow$ “ Sei nun  $f$  ein BMW-Equilibrium und  $x$  ein beliebiges zulässiges Routing. Nach Voraussetzung ist  $f$  globales Minimum von  $\gamma|_D$ , insbesondere gilt also  $\gamma(f) \leq \gamma(x)$ . Da  $D$  konvex ist, muss aber auch für alle  $x'$  mit  $x' = (1-c)f + cx$ ,  $c \in [0, 1]$ , gelten:  $\gamma(f) \leq \gamma(x')$ . Folglich ist die Richtungsableitung an der Stelle  $f$  in Richtung  $x - f$  positiv und es gilt:

$$\begin{aligned} (3.11) \quad C^f(x) - C^f(f) &= \sum_{a \in A} (x_a - f_a) \ell_a(f_a) \\ &= \underbrace{\|x - f\|_2}_{\geq 0} \cdot \left\langle (\ell_a(f_a))_{a \in A}, \frac{x - f}{\|x - f\|_2} \right\rangle \geq 0 \end{aligned}$$

„ $\Leftarrow$ “ Es sei  $f$  ein zulässiges Routing. Gilt für alle weiteren zulässigen Routings  $x$ , dass  $C^f(f) \leq C^f(x)$ , dann ist nach (3.11) die Richtungsableitung von  $\gamma$  an der Stelle  $f$  in alle zulässigen Richtungen positiv. Aufgrund der Konvexität von  $\gamma$  ist  $f$  folglich ein globales Minimum von  $\gamma|_D$  und nach Definition 3.9 also ein BMW-Equilibrium.  $\square$

**SATZ 3.12.** *Jedes BMW-Equilibrium ist ein Benutzer-Equilibrium (mit Kapazitätsbeschränkungen).*

**BEWEIS.** Es wird gezeigt: Die Bedingung, wie in Bemerkung 3.6 angegeben, wird erfüllt. Dann gilt auch Definition 3.2. Dazu wird die Annahme zum Widerspruch geführt, dass es ein  $\bar{\epsilon}$  gibt, so dass es für jedes  $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon}]$  zwei Pfade  $Q, R \in \mathcal{P}_k$  für ein OD-Paar  $k$  gibt mit  $f_Q > 0$  und  $\ell_R(f^\epsilon) < \ell_Q(f)$ :

Sei also  $x := f^\epsilon$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} (3.13) \quad C^f(x) - C^f(f) &= \sum_{a \in A} (x_a - f_a) \ell_a(f_a) \\ &= \sum_{P \in \mathcal{P}} (x_P - f_P) \ell_P(f) \\ &= \bar{\epsilon}(\ell_R(f) - \ell_Q(f)) \quad \text{nach (3.7)} \end{aligned}$$

Nach Annahme muss aber  $\ell_R(f) < \ell_Q(f)$  sein, da  $\ell_R(f) \leq \ell_R(f^\epsilon)$  nach (3.7) und Latenzfunktionen monoton wachsend und stetig sind. Damit folgt nach (3.13), dass  $C^f(x) < C^f(f)$ . Nach Lemma 3.10 ein Widerspruch!  $\square$

Es gibt einen weiteren Grund, der das Betrachten von BMW-Equilibrien rechtfertigt: Ohne explizite Kapazitätsbeschränkungen werden Höchstgrenzen im Verkehrsfluss oft durch modifizierte Latenzfunktionen modelliert. Naheliegend und üblich ist folgende Methode: Es wird ein „Strafparameter“  $\mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  gewählt und die Latenzfunktionen wie folgt modifiziert:

$$\ell_a^\mu(x_a) := \begin{cases} \ell(x_a) + \frac{\mu}{c_a - x_a} & \text{für } x_a < c_a \\ \infty & \text{für } x_a \geq c_a \end{cases}$$

In [Lemma 3.14](#) wird gezeigt, dass im Grenzfall  $\mu \rightarrow 0$  eigennützige Verkehrsteilnehmer genauso agieren wie bei einem BMW-Equilibrium.

**LEMMA 3.14.** *Gegeben sei ein Netzwerk mit Kapazitätsbeschränkungen. Ferner seien  $(\mu_i)$  eine streng monoton fallende Nullfolge und  $(f^i)$  die entsprechende Folge von Benutzer-Equilibrien im gleichen Netzwerk ohne Kapazitätsbeschränkungen, aber mit Latenzfunktionen  $\ell_a^{\mu_i}$ . Dann ist jeder Häufungspunkt der Folge  $(f^i)$  ein BMW-Equilibrium der ursprünglichen Instanz (mit Kapazitätsbeschränkungen).*

**BEWEIS.** Definiere für ein  $a \in \mathbb{R}$ :

$$[\cdot]^{<a} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \quad x \mapsto \begin{cases} x & \text{wenn } x < a \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

Nach [Beckmann et al. \(1956\)](#) ist bekannt: Ein Benutzer-Equilibrium  $f^i$  (in einem Netzwerk ohne explizite Kapazitätsbeschränkungen) minimiert

$$(3.15) \quad (x_a)_{a \in A} \mapsto \sum_{a \in A} \int_0^{x_a} \left( \ell_a(z) + \left[ \frac{\mu_i}{c_a - z} \right]^{<c_a} \right) dz$$

unter den Nebenbedingungen [\(3.8b\)](#) – [\(3.8e\)](#). Die Kapazitätsbeschränkungen werden offensichtlich eingehalten, da es immer (nach unserer Konvention, nur erfüllbare Netzwerke zu betrachten) eine Lösung mit endlicher Gesamtreisezeit gibt.

Folglich minimiert  $f^i$  auch

$$(3.16) \quad (x_a)_{a \in A} \mapsto \sum_{a \in A} \int_0^{x_a} \ell_a(z) dz - \mu_i \sum_{a \in A} \left[ \ln(c_a - x_a) \right]^{<c_a}$$

unter selbigen Bedingungen, da [\(3.16\)](#) und [\(3.15\)](#) sich nur um eine Konstante unterscheiden. Also muss jeder Häufungspunkt von  $(f^i)$  ein BMW-Equilibrium der ursprünglichen Instanz sein, wie am Grenzfall  $\mu_i \rightarrow 0$  ersichtlich.  $\square$

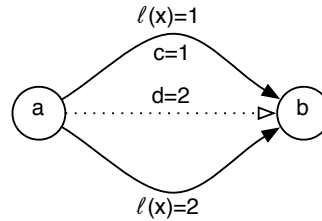


Auch wenn jede konvergente Teilfolge gegen ein BMW-Equilibrium konvergiert, ist im Allgemeinen nicht erfüllt, dass das Verhältnis der Gesamtreisezeit der Benutzer-Equilibrien zu den jeweiligen Systemoptima entsprechend konvergiert – es also als Grenzwert das Verhältnis des BMW-Equilibriums zum Systemoptimum im Netzwerk *mit* expliziten Kapazitäten aufweist.

Formal: Sei etwa  $(f^{i_j})$  eine Teilfolge, die gegen ein BMW-Equilibrium  $f$  konvergiert. Dann gilt im Allgemeinen:

$$(3.17) \quad \frac{C^{\mu_i}(f^{i_j})}{C^{\mu_i}(f^{i_j,*})} \xrightarrow{\mu_i \rightarrow 0} \frac{C(f)}{C(f^*)}$$

Dabei bezeichnen  $f^{i_j,*}$  und  $f^*$  jeweils Systemoptima der Instanzen, in denen  $f^{i_j}$  Benutzer-Equilibrium beziehungsweise  $f$  BMW-Equilibrium sind. Das in [Figur 3.5](#) dargestellte Beispiel illustriert dies:



FIGUR 3.5: Einfaches Netzwerk mit Kapazitätsbeschränkungen

Man sieht leicht, dass Systemoptimum  $f^*$  und BMW-Equilibrium  $f$  zusammenfallen und über beide Pfade einen Fluss von 1 routen. Gesamtreisezeit ist demnach jeweils  $C(f^*) = C(f) = 3$ . Wird nun die Kapazitätsbeschränkung über eine modifizierte Latenzfunktion für den oberen Pfad,

$$\ell(x) = 1 + \frac{\mu}{1-x},$$

modelliert, so ergibt sich als Benutzer-Equilibrium  $f^\mu := (1 - \mu, 1 + \mu)$ . Die erste Komponente beschreibt hier den Fluss auf dem oberen Pfad. Denn nur so sind die Reisezeiten über beide Pfade gleich. Als Systemoptimum ergibt sich  $f^{\mu,*} := (1 - \sqrt{\mu}, 1 + \sqrt{\mu})$  mit Gesamtreisezeit  $3 - \mu + 2\sqrt{\mu}$ , denn nur so sind die Grenzkosten auf beiden Pfaden gleich.

Folglich konvergiert die linke Seite von (3.17) gegen  $\frac{4}{3}$  und nicht gegen 1. Wie in [Lemma 3.14](#) gezeigt, konvergieren die Benutzer-Equilibrien  $(1 - \mu_i, 1 + \mu_i)$  aber gegen das BMW-Equilibrium  $(1, 1)$  für  $\mu_i \rightarrow 0$ .

**3.3. Preis der Anarchie bei BMW-Equilibrien.** In diesem Abschnitt wird eine obere Schranke für den Preis der Anarchie hergeleitet, sofern man sich auf BMW-Equilibrien beschränkt.

SATZ 3.18. Sei ein Netzwerk mit Kapazitätsbeschränkungen gegeben, für das  $f$  ein BMW-Equilibrium ist. Ferner sei  $x$  ein zulässiges Routing für das gleiche Netzwerk, wobei allerdings Kapazitäten und Bedarf verdoppelt sind. Dann gilt  $C(f) \leq C(x)$ .

BEWEIS. Definiere neue Latenzfunktionen:

$$(3.19) \quad \bar{\ell}_a(x_a) = \begin{cases} \ell_a(f_a) & \text{wenn } x_a \leq f_a \\ \ell_a(x_a) & \text{wenn } x_a > f_a \end{cases}$$

Offensichtlich sind auch die  $\ell_a$  nicht negativ, monoton wachsend und stetig. Es bezeichne  $\bar{C}(x)$  die Gesamtreisezeit bei Routing  $x$  mit den neuen Latenzfunktionen. Dabei gilt:

$$(3.20) \quad \begin{aligned} \bar{C}(x) - C(x) &= \sum_{a \in A} (\bar{\ell}_a(x_a) - \ell_a(x_a)) x_a \\ &\leq \sum_{a \in A} \ell_a(f_a) f_a = C(f) \end{aligned}$$

Es gilt (3.20), da  $\bar{\ell}_a(x_a) - \ell_a(x_a) = 0$  für  $x_a > f_a$  und andernfalls  $\bar{\ell}_a(x_a) - \ell_a(x_a) = \ell_a(f_a) - \ell_a(x_a) \leq \ell_a(f_a)$ . Folglich ist  $(\bar{\ell}_a(x_a) - \ell_a(x_a))x_a$  nach oben durch  $\ell_a(f_a)f_a$  beschränkt.

Ferner gilt nach Definition:  $\bar{\ell}_a(x_a) \geq \ell_a(f_a)$ . Damit ergibt sich:

$$(3.21) \quad \bar{C}(x) = \sum_{a \in A} \bar{\ell}_a(x_a) x_a \geq \sum_{a \in A} \ell_a(f_a) x_a = C^f(x)$$

Da  $\frac{1}{2} \cdot x$  ein zulässiges Routing für das ursprüngliche Netzwerk ist, muss nach Lemma 3.10 gelten:  $C^f(\frac{1}{2} \cdot x) \geq C(f)$ . Insgesamt ergibt sich somit:

$$(3.22) \quad \begin{aligned} C(f) &= 2 \cdot C(f) - C(f) = 2 \cdot C^f\left(\frac{1}{2} \cdot x\right) - C(f) \\ &= C^f(x) - C(f) \\ &\leq \bar{C}(x) - C(f) && \text{nach (3.21)} \\ &\leq C(x) && \text{nach (3.20)} \end{aligned}$$

Hierbei ist (3.22) dadurch einzusehen, dass bei konstanten Latenzen die Gesamtreisezeit linear mit einem Routing skaliert.  $\square$

Im Folgenden wird nun die Effizienz eines beliebigen BMW-Equilibriums untersucht. Weiterhin seien die Latenzfunktionen nicht negativ, monoton wachsend und stetig. Sei  $\mathcal{L}$  im Folgenden eine Menge von Latenzfunktionen, beispielsweise alle Polynome vom Grad  $n$  mit positiven Koeffizienten. Für jede Funktion  $\ell \in \mathcal{L}$  und jedes

$v \geq 0$  wird definiert:

$$(3.23) \quad \beta(v, \ell) := \begin{cases} 0 & \text{wenn } v = 0 \text{ oder } \ell(v) = 0 \\ \frac{1}{\ell(v)v} \cdot \max_{x \geq 0} \{x(\ell(v) - \ell(x))\} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\beta(\ell) := \sup_{v \geq 0} \beta(v, \ell)$$

$$\beta(\mathcal{L}) := \sup_{\ell \in \mathcal{L}} \beta(\ell)$$

Es lassen sich unter anderem folgende Eigenschaften feststellen:

- Offensichtlich ist  $\beta(v, \ell) \geq 0$ , wie man sofort bei  $x = v$  sieht.
- Das Maximum in (3.23) kann nur für  $x \in [0, v]$  angenommen werden, da für  $x > v$  gilt:  $x(\ell(v) - \ell(x)) \leq 0$ .
- Es gilt  $\beta(v, \ell) < 1$ , da  $x(\ell(v) - \ell(x)) \in [0, \ell(v)v]$  für alle  $x \in [0, v]$ . Es kann aber nicht  $\beta(v, \ell) = 1$  sein, da dann  $x = v$  und somit  $\ell(v) - \ell(x) = 0$  sein müsste.
- Aufgrund der letzten Bemerkung sind auch  $\beta(\ell)$  und  $\beta(\mathcal{L})$  kleiner oder gleich 1.

**SATZ 3.24.** *Sei  $\mathcal{L}$  eine Menge von nicht negativen, monoton wachsenden und stetigen Latenzfunktionen. Gegeben sei ein Netzwerk mit Kapazitätsbeschränkungen, wobei alle Latenzfunktionen aus  $\mathcal{L}$  stammen. Dann ist das Verhältnis der Gesamtreisezeit eines BMW-Equilibriums  $f$  zu der eines Systemoptimums  $f^*$  nach oben beschränkt durch  $(1 - \beta(\mathcal{L}))^{-1}$ :*

$$C(f) \leq \frac{1}{1 - \beta(\mathcal{L})} \cdot C(f^*)$$

**BEWEIS.** Sei  $x$  ein zulässiges Routing. Es gilt:

$$(3.25) \quad \begin{aligned} C^f(x) &= \sum_{a \in A} \ell_a(f_a) x_a = \sum_{a \in A} \ell_a(f_a) x_a - \ell_a(x_a) x_a + \ell_a(x_a) x_a \\ &\leq \sum_{a \in A} \max_{x \geq 0} \{ \ell_a(f_a) x - \ell_a(x) x \} + \ell_a(x_a) x_a \\ &= \sum_{a \in A} \beta(f_a, \ell_a) \ell_a(f_a) f_a + \ell_a(x_a) x_a \\ &\leq \beta(\mathcal{L}) C(f) + C(x) \end{aligned}$$

Einsetzen von  $f^*$  für  $x$  ergibt:

$$\begin{aligned} C(f) &\leq C^f(x) && \text{nach Lemma 3.10} \\ &\leq \beta(\mathcal{L}) C(f) + C(f^*) \end{aligned}$$

□

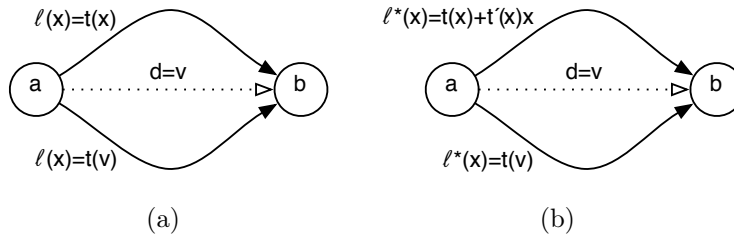
**3.4. Der Anarchie-Wert einer Menge von Latenzfunktionen.** Roughgarden (2003) führt für eine Menge von Latenzfunktionen  $\mathcal{L}$  den Anarchie-Wert  $\alpha(\mathcal{L})$  ein. Als Voraussetzung an  $\mathcal{L}$  stellt Roughgarden, dass jede enthaltene Latenzfunktion  $\ell$  zusätzlich zu den normalen Eigenschaften differenzierbar und  $x \mapsto \ell(x)x$  konvex ist. Der Anarchie-Wert  $\alpha(\ell)$  einer Latenzfunktion  $\ell$  wird dann definiert als:

$$(3.26) \quad \alpha(\ell) := \sup_{\substack{v > 0 \\ \ell(v) > 0}} \left( \lambda \cdot \frac{\ell(\lambda v)}{\ell(v)} + (1 - \lambda) \right)^{-1}$$

Dabei ist  $\lambda \in [0, 1]$  Lösung für  $\ell^*(\lambda v) = \ell(\lambda v) + \ell'(\lambda v)\lambda v = \ell(v)$ . Ein solches  $\lambda$  gibt es aufgrund der Stetigkeit von  $\ell^*$  nach Zwischenwertsatz, denn  $\ell^*(0 \cdot v) = \ell(0) \leq \ell(v)$  und  $\ell^*(1 \cdot v) = \ell(v) + \ell'(v)v \geq \ell(v)$ . Umstellen von (3.26) ergibt:

$$\alpha(\ell) := \left[ 1 - \sup_{\substack{v > 0 \\ \ell(v) > 0}} \lambda \left( \frac{\ell(v) - \ell(\lambda v)}{\ell(v)} \right) \right]^{-1}$$

Zur anschaulichen Erklärung des Anarchie-Wertes betrachte [Figur 3.6](#).



FIGUR 3.6: Latenzfunktionen und Grenzkosten

Nach [Abschnitt 2.2](#) ist bekannt: Ein Systemoptimum für das gezeigte Netzwerk (a) ist ein Benutzer-Equilibrium des Netzwerks in (b), bei dem die Latenzfunktionen genau die Grenzkostenfunktionen des Netzwerks aus (a) sind.

Es sei  $f^*$  das Systemoptimum,  $f$  ein Benutzer-Equilibrium. Die Kosten  $C(f^*)$  des Systemoptimums betragen  $\lambda v \cdot t(\lambda v) + (v - \lambda v) \cdot \ell(v)$ , wenn  $\lambda \in [0, 1]$  Lösung für  $\ell^*(\lambda v) = \ell(v)$  ist. Die Kosten eines Benutzer-Equilibriums  $C(f)$  dagegen sind einfach zu bestimmen durch:  $v \cdot t(v)$ .

Als Preis der Anarchie ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{C(f)}{C(f^*)} &= \left( \frac{\lambda \cdot t(\lambda v) + (1 - \lambda) \cdot \ell(v)}{\ell(v)} \right)^{-1} \\ &= \left( \lambda \cdot \frac{t(\lambda v)}{\ell(v)} + (1 - \lambda) \right)^{-1} \end{aligned}$$

Somit erklärt sich Definition (3.26): Durch  $\alpha(\ell)$  wird der höchstmögliche Preis der Anarchie in einem Netzwerk wie in [Figur 3.6 \(a\)](#) beschrieben (unter den Voraussetzungen wie oben):

$$(3.27) \quad \alpha(\ell) = \sup_{\substack{v>0 \\ \ell(v)>0}} \frac{C(f(v))}{C(f^*(v))}$$

Hierbei seien  $f$  und  $f^*$  wie oben erklärt, jedoch in Abhängigkeit eines variablen Bedarfs  $v$ .

Hauptergebnis von [Roughgarden \(2003, Theorem 3.8\)](#) ist, dass der Preis der Anarchie unabhängig von der Netzwerktopologie ist. Das heißt, die Abschätzung des Preises der Anarchie nach oben durch  $\alpha(\mathcal{L})$  gilt für *jedes* Netzwerk ohne Kapazitätsbeschränkungen.

**LEMMA 3.28.** *Gegeben sei eine Menge von Latenzfunktionen  $\mathcal{L}$ . Jedes  $\ell \in \mathcal{L}$  sei differenzierbar und  $x \mapsto \ell(x)x$  sei konvex. Dann gilt:  $\alpha(\mathcal{L}) = (1 - \beta(\mathcal{L}))^{-1}$*

**BEWEIS.** Nach Definition genügt zu zeigen:  $\alpha(\ell) = (1 - \beta(\ell))^{-1}$  für jedes  $\ell \in \mathcal{L}$ . Sei also  $\ell \in \mathcal{L}$ .

„ $\leq$ “ Es gilt  $\alpha(\ell) \leq (1 - \beta(\ell))^{-1}$ , denn mit Einsetzen von  $x = \lambda v$  in [\(3.23\)](#) erhält man:

$$(3.29) \quad \beta(\ell) \geq \sup_{\substack{v>0 \\ \ell(v)\geq 0}} \lambda \left( \frac{\ell(v) - \ell(\lambda v)}{\ell(v)} \right)$$

Folglich  $\alpha(\ell)^{-1} \geq 1 - \beta(\ell)$  und  $\alpha(\ell) \leq (1 - \beta(\ell))^{-1}$ .

„ $\geq$ “ Betrachte wieder [\(3.23\)](#) für ein  $v > 0$ . Es gilt:  $x \mapsto x(\ell(v) - \ell(x)) = \ell(v)x - \ell(x)x$  ist konkav, da  $x \mapsto \ell(x)x$  konvex ist. Folglich nimmt  $x \mapsto x(\ell(v) - \ell(x))$  sein Maximum an einer Stelle  $\xi \in (0, v)$  an und  $\frac{d}{dx}(x(\ell(v) - \ell(x)))|_{x=\xi} = 0$ . Also ist  $\ell^*(\lambda v) = \ell(v)$  genau dann erfüllt, wenn  $\lambda = \frac{\xi}{v}$ , und in [\(3.29\)](#) gilt auch „ $\leq$ “.  $\square$

Das Hauptergebnis von [Roughgarden \(2003, Theorem 3.8\)](#) wird durch [Lemma 3.28](#) also impliziert, denn  $\beta$  ist unabhängig von der Struktur des zugrunde liegenden Netzwerkes definiert. Ferner wird es sogar auf Mengen von Latenzfunktionen erweitert, die *nicht* die von [Roughgarden](#) angegebenen Voraussetzungen erfüllen – sondern nur die in [Abschnitt 3.3](#) gemachten.

**BEMERKUNG 3.30.** *[Lemma 3.28](#) impliziert ein weiteres Ergebnis: Die in [Satz 3.18](#) gegebene obere Schranke wird (wenigstens asymptotisch) auch angenommen. Dies ist klar nach [\(3.27\)](#).*

#### 4. Berechnung des höchstmöglichen Preises der Anarchie

LEMMA 4.1. Sei  $\mathcal{L}$  Menge von Latenzfunktionen. Es gebe eine Funktion  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass jedes  $\ell \in \mathcal{L}$  die Ungleichung  $\ell(cx) \geq s(c)\ell(x)$  für alle  $c \in [0, 1]$  und  $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  erfüllt. Dann gilt:

$$\beta(\mathcal{L}) \leq \sup_{0 \leq x \leq 1} \{x(1 - s(x))\}$$

BEWEIS. Umstellen von (3.23) ergibt:

$$\begin{aligned} \beta(v, \ell) &= \max_{0 \leq x \leq v} \left\{ \frac{x}{v} \left( 1 - \frac{\ell(x)}{\ell(v)} \right) \right\} = \max_{0 \leq x \leq v} \left\{ \frac{x}{v} \left( 1 - \frac{\ell((x/v) \cdot v)}{\ell(v)} \right) \right\} \\ &\leq \sup_{0 \leq x \leq v} \left\{ \frac{x}{v} \left( 1 - \frac{s(x/v)\ell(v)}{\ell(v)} \right) \right\} \quad \text{nach Voraussetzung} \\ &= \sup_{0 \leq x \leq 1} \{x(1 - s(x))\} \end{aligned}$$

Nach Definition von  $\beta(\mathcal{L})$  folgt die Behauptung.  $\square$

LEMMA 4.2. Sei  $\mathcal{L}$  Menge von Latenzfunktionen. Es gebe eine Funktion  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass jedes  $\ell \in \mathcal{L}$  die Ungleichung  $\ell(cx) \geq s(c) + \ell(x)$  für alle  $c \in [0, 1]$  und  $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  erfüllt. Ferner sei ein Netzwerk mit Kapazitätsbeschränkungen gegeben, für das  $f$  ein BMW-Equilibrium und  $f^*$  ein Systemoptimum ist. Es ist  $D := \sum_{k \in K} d_k$  der Gesamtbedarf. Dann gilt:

$$C(f) \leq C(f^*) - |A| \cdot D \cdot \inf_{0 \leq x \leq 1} \{x \cdot s(x)\}$$

BEWEIS. Einsetzen von (3.23) ergibt:

$$\begin{aligned} \ell(v)\beta(v, \ell) &= \max_{0 \leq x \leq v} \left\{ \frac{x}{v} (\ell(v) - \ell(x)) \right\} = \max_{0 \leq x \leq v} \left\{ \frac{x}{v} \left( \ell(v) - \ell\left(\frac{x}{v} \cdot v\right) \right) \right\} \\ &\leq \sup_{0 \leq x \leq v} \left\{ \frac{x}{v} \cdot \left( \ell(v) - s\left(\frac{x}{v}\right) - \ell(v) \right) \right\} \quad \text{nach Voraussetzung} \\ (4.3) \quad &\leq \sup_{0 \leq x \leq v} \left\{ -\frac{x}{v} \cdot s\left(\frac{x}{v}\right) \right\} = - \inf_{0 \leq x \leq 1} \{x \cdot s(x)\} \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} C(f) &\leq \sum_{a \in A} \beta(f_a, \ell_a) \ell_a(f_a) f_a + \sum_{a \in A} \ell_a(f_a^*) f_a^* \quad \text{nach (3.25)} \\ &\leq - \sum_{a \in A} \inf_{0 \leq x \leq 1} \{x \cdot s(x)\} \cdot f_a + C(f^*) \quad \text{nach (4.3)} \\ &\leq C(f^*) - |A| \cdot D \cdot \inf_{0 \leq x \leq 1} \{x \cdot s(x)\} \quad \square \end{aligned}$$

Die Erkenntnisse werden im Folgenden auf einige Mengen von Latenzfunktionen angewendet. Für die Menge aller konkaven Funktionen lässt sich aussagen:

KOROLLAR 4.4. Sei  $\mathcal{L}$  Menge von Latenzfunktionen. Ferner gelte für alle  $\ell \in \mathcal{L}$ :  $\ell(cx) \geq c \cdot \ell(x)$  für alle  $c \in [0, 1]$  und  $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Dann gilt:  $\alpha(\mathcal{L}) \leq \frac{4}{3}$ .

BEWEIS. Setze  $s(x) := x$ . Dann gilt nach Lemma 4.1:

$$\beta(\mathcal{L}) \leq \sup_{0 \leq x \leq 1} \{x(1-x)\} = \frac{1}{4}$$

Die Behauptung folgt, da  $\alpha(\mathcal{L}) = (1 - \beta(\mathcal{L}))^{-1} = \frac{4}{3}$ . □

Insofern ist Korollar 4.4 eine Erweiterung zu Satz 2.8: Letzterer macht eine Aussage zu linearen Latenzfunktionen und Netzwerken ohne Kapazitätsbeschränkungen, ersterer zu allgemeinen *konkaven* Latenzfunktionen und Netzwerken *mit* Kapazitätsbeschränkungen.

KOROLLAR 4.5. Sei  $\mathcal{L}$  Menge von Latenzfunktionen und  $n \in \mathbb{N}$ . Ferner gelte für alle  $\ell \in \mathcal{L}$ :  $\ell(cx) \geq c^n \cdot \ell(x)$  für alle  $c \in [0, 1]$  und  $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Dann gilt:

$$\alpha(\mathcal{L}) \leq \frac{(n+1)^{1+1/n}}{(n+1)^{1+1/n} - n}$$

BEWEIS. Setze  $s(x) := x^n$ . Dann gilt nach Lemma 4.1:

$$\begin{aligned} \beta(\mathcal{L}) &\leq \sup_{0 \leq x \leq 1} \{x(1-x^n)\} \\ (4.6) \qquad &= \frac{n}{(n+1)^{1+1/n}} \end{aligned}$$

Dabei ist (4.6) wie folgt einzusehen: Definiere  $\gamma(x) := x(1-x^n)$ . Offensichtlich ist  $\gamma$  stetig und konkav auf  $[0, 1]$  und  $\gamma(0) = \gamma(1) = 0$ . Folglich nimmt  $\gamma$  auf  $[0, 1]$  sein Maximum an einer Stelle  $\xi \in (0, 1)$  an, wobei  $\gamma'(\xi) = 1 - (n+1)\xi^n = 0$  gelten muss. Umstellen ergibt  $\xi = \frac{1}{(n+1)^{1/n}}$ . Demnach:

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} \{x(1-x^n)\} = \gamma(\xi) = \frac{n}{(n+1)^{1+1/n}} \quad \square$$

KOROLLAR 4.7. Sei  $\mathcal{L}$  Menge von Latenzfunktionen und  $n \in \mathbb{N}$ . Ferner gelte für alle  $\ell \in \mathcal{L}$ :  $\ell(cx) \geq \log_b(c) + \ell(x)$  für alle  $c \in [0, 1]$  und  $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Es sei ein Netzwerk mit Kapazitätsbeschränkungen gegeben, für das  $f$  ein BMW-Equilibrium und  $f^*$  ein Systemoptimum ist. Es ist  $D := \sum_{k \in K} d_k$  der Gesamtbedarf. Dann gilt:

$$C(f) \leq C(f^*) + \frac{|A| \cdot D}{e \ln b}$$

BEWEIS. Setze  $s(x) := \log_b(x)$ . Dann gilt nach [Lemma 4.2](#):

$$(4.8) \quad \begin{aligned} C(f) &\leq C(f^*) - |A| \cdot D \cdot \inf_{0 \leq x \leq 1} \{x \cdot \log_b(x)\} \\ &= C(f^*) + \frac{|A| \cdot D}{e \ln b} \end{aligned}$$

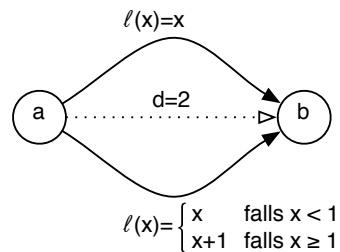
Dabei ist (4.8) wie folgt einzusehen: Definiere  $\gamma(x) := x \cdot \log_b(x)$ . Offensichtlich ist  $\gamma$  auf  $(0, 1]$  konvex. Gibt es eine Stelle  $\xi \in (0, 1)$ , an der  $\gamma'(x) = \frac{\ln x}{\ln b}$  verschwindet, so muss folglich dieses  $\xi$  das Minimum von  $\gamma$  auf  $(0, 1]$  sein. Nachrechnen ergibt:  $\xi = e^{-1}$ . Demnach:

$$\begin{aligned} C(f^*) - |A| \cdot D \cdot \inf_{0 \leq x \leq 1} \{x \cdot \log_b(x)\} &= C(f^*) - |A| \cdot D \cdot \gamma(\xi) \\ &= C(f^*) - |A| \cdot D \cdot \frac{-1}{e \ln b} \quad \square \end{aligned}$$

## 5. Unstetige Latenzfunktionen

In diesem Abschnitt wird überlegt, ob sich die bisherigen Ergebnisse auch auf unstetige Latenzfunktionen erweitern lassen. [Bernstein & Smith \(1994\)](#) etwa zeigen auf, dass dies in der Praxis manchmal wünschenswert ist.

Ähnlich zu [Bemerkung 3.6](#) stellt sich die Frage, wie man in diesem Fall ein Equilibrium sinnvoll definiert. [Figur 5.1](#) zeigt ein Netzwerk, bei dem gemäß [Definition 3.2](#) oder (3.7) keine Benutzer-Equilibrien existieren. Allerdings stellt man fest, dass  $(1, 1)$  ein BMW-Equilibrium ist.



FIGUR 5.1: Kein Benutzer-Equilibrium in einfachem Netzwerk mit unstetigen Latenzfunktionen

**5.1. Linkstetige Latenzfunktionen.** Es werden zunächst linkstetige Latenzfunktionen betrachtet. Man sieht leicht, dass ein BMW-Equilibrium hier weiterhin immer existiert: Nach wie vor wird von (3.8a) – (3.8e) eine konvexe Funktion über einem nicht leeren Polytop minimiert.



Um einen Beweis analog zu [Satz 3.24](#) zu führen, wird folgende Neudefinition vorgenommen. Seien  $f$  und  $x$  zulässige Routings, dann:

$$C^f(x) := \sum_{a \in A} \ell_a(f_a^+) x_a$$

Hierbei bezeichnet  $\ell_a(f_a^+)$  den rechtsseitigen Grenzwert  $\lim_{z \searrow f_a} \ell_a(z)$ . Analog bezeichnet  $\ell_a(f_a^-)$  im Folgenden den linksseitigen Grenzwert.

Da die Latenzfunktionen nicht mehr stetig sein müssen, hat

$$\gamma((x_a)_{a \in A}) := \sum_{a \in A} \int_0^{x_a} \ell_a(z) dz$$

im Allgemeinen keinen Gradient. Aufgrund der Konvexität von  $\gamma$  gibt es jedoch stets einen Subgradient, an Stelle  $f$  etwa  $\nabla_f := (\ell_a(f_a^+))_{a \in A}$ . Mit dieser Festlegung ergibt sich als einfache Darstellung:  $C^f(x) = \langle \nabla_f, x \rangle$ . Sei nun  $f$  BMW-Equilibrium und somit Minimumstelle, dann muss für jedes zulässige Routing  $x$  die folgende Ungleichung gelten:

$$\begin{aligned} \langle \nabla_f, x - f \rangle &= \langle \nabla_f, x \rangle - \langle \nabla_f, f \rangle \geq 0 \\ &\Leftrightarrow C^f(f) \leq C^f(x) \end{aligned}$$

Dies ist eine direkte Konsequenz daraus, dass  $\nabla_f$  Subgradient von  $\gamma$  an der Stelle  $f$  ist. Nach Definition gilt ferner  $C(f) \leq C^f(f)$ , da die Latenzfunktionen linksstetig sind.

Eine kleine Änderung ist auch am Parameter  $\beta(v, \ell)$  nötig, der wie folgt neu definiert wird:

$$\beta(v, \ell) := \frac{1}{v \cdot \ell(v)} \max_{x \geq 0} \{x(\ell(v^+) - \ell(x))\}$$

Der Beweis kann nun vervollständigt werden:

$$\begin{aligned} C(f) &\leq C^f(f) \leq C^f(x) && \text{nach Vorbemerkungen} \\ &= \sum_{a \in A} \ell_a(f_a^+) x_a = \sum_{a \in A} \ell_a(f_a^+) x_a - \ell_a(x_a) x_a + \ell_a(x_a) x_a \\ &\leq \sum_{a \in A} \max_{x \geq 0} \{ \ell_a(f_a^+) x - \ell_a(x) x \} + \ell_a(x_a) x_a \\ &= \sum_{a \in A} \beta(f_a, \ell_a) \ell_a(f_a) f_a + \ell_a(x_a) x_a \\ &\leq \beta(\mathcal{L}) C(f) + C(x) \end{aligned}$$

**5.2. Allgemeine unstetige Latenzfunktionen.** Zu klären bleibt die Frage, ob sich auch für allgemeine unstetige Latenzfunktionen eine Aussage analog zu [Satz 3.24](#) machen lässt. Hier stellt man fest, dass es zumindest schwierig ist, eine passende Erweiterung der bisherigen Definitionen vorzunehmen. Dies lässt sich anhand folgender Instanz illustrieren: Gegeben sei wieder ein Netzwerk wie in [Figur 5.1](#) dargestellt. Der Bedarf von  $a$  nach  $b$  betrage jedoch nur 1 und die Latenz auf der oberen Kante  $r$  sei  $\ell_r(x) = 1$  und auf der unteren Kante  $s$ :

$$\ell_s(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{wenn } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} & \text{wenn } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ \frac{4}{3} & \text{wenn } x \geq 1 \end{cases}$$

Offensichtlich lässt sich jedes zulässige Routing mittels einer Unbekannten darstellen. Identifiziert man  $(1-x, x)$  mit  $x$ , wobei die erste Komponente den Fluss auf der oberen Kante angibt, so ist ein BMW-Equilibrium nach Definition Minimumstelle von

$$\begin{aligned} x &\mapsto \int_0^{1-x} \ell_r(z) dz + \int_0^x \ell_s(z) dz \\ &= \begin{cases} 1-x + \frac{1}{2}x & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1-x + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{4} & \text{für } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}x & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x^2 & \text{für } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

auf dem Intervall  $[0, 1]$ . Man sieht leicht, dass das Minimum bei  $x = 1$  angenommen wird, also  $f := (0, 1)$  einziges BMW-Equilibrium ist. Die Gesamtreisezeit beträgt offensichtlich  $\frac{4}{3}$ .

Das Systemoptimum wäre Minimumstelle von

$$\begin{aligned} x &\mapsto \ell_r(1-x)(1-x) + \ell_s(x)x \\ &= \begin{cases} 1-x + \frac{1}{2}x & \text{für } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1-x + \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x & \text{für } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 1-x + \frac{4}{3}x & \text{für } x = 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}x & \text{für } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}x^2 & \text{für } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 1 + \frac{1}{3}x & \text{für } x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Offensichtlich nimmt die Abbildung auf  $[0, 1]$  jedoch kein Minimum an. Das Infimum kann aber durch  $x = \frac{1}{2} - \varepsilon$ , also das Routing  $f^\varepsilon := (\frac{1}{2} + \varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon)$  approximiert werden. Für  $\varepsilon \rightarrow 0$  strebt die Gesamtreisezeit dann gegen  $3/4$ .

Die Definition des Parameters  $\beta(v, \ell)$  werde noch etwas weiter als im vorigen Abschnitt verallgemeinert:

$$\begin{aligned}\beta(v, \ell) &:= \frac{1}{v \cdot \ell(v^-)} \sup_{x \geq 0} \{x(\ell(v^+) - \ell(x^-))\} \\ &= \frac{1}{v \cdot \ell(v^-)} \sup_{0 \leq x \leq v} \{x(\ell(v^+) - \ell(x^-))\}\end{aligned}$$

Im Beispiel ergibt sich dann  $\beta(\mathcal{L}) = \sup_{v \geq 0} \beta(v, \ell_s) = 5/12$ . Denn:

$$\beta(v, \ell_s) = \begin{cases} \frac{2}{v} \cdot \sup_{0 \leq x \leq v} \left\{ x \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \right\} = 0 & \text{für } 0 \leq v < \frac{1}{2} \\ 4 \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{3} & \text{für } v = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\frac{2}{3}v^2 + \frac{1}{3}v} \cdot \sup_{0 \leq x \leq v} \left\{ x \left( \frac{2}{3}v + \frac{1}{3} - \ell_s(x^-) \right) \right\} \stackrel{(*)}{\leq} \frac{1}{4} & \text{für } \frac{1}{2} < v < 1 \\ \sup_{0 \leq x \leq 1} \left\{ x \left( \frac{4}{3} - \ell_s(x^-) \right) \right\} = \frac{5}{12} & \text{für } v = 1 \\ \frac{3}{4v} \cdot \sup_{0 \leq x \leq v} \left\{ x \left( \frac{4}{3} - \ell_s(x^-) \right) \right\} < \frac{1}{3} & \text{für } v > 1 \end{cases}$$

Dabei ist (\*) wie folgt einzusehen. Es gilt für  $\frac{1}{2} < v < 1$ :

$$\frac{1}{\frac{2}{3}v^2 + \frac{1}{3}v} \cdot \sup_{0 \leq x \leq \frac{1}{2}} \left\{ x \left( \frac{2}{3}v + \frac{1}{3} - \ell_s(x^-) \right) \right\} = \frac{\frac{1}{3}v - \frac{1}{12}}{\frac{2}{3}v^2 + \frac{1}{3}v} \leq \frac{1}{4}$$

und ferner:

$$\frac{1}{\frac{2}{3}v^2 + \frac{1}{3}v} \cdot \sup_{\frac{1}{2} < x \leq v} \left\{ \frac{2}{3}x(v - x) \right\} = \frac{\frac{1}{3}v - \frac{1}{6}}{\frac{2}{3}v^2 + \frac{1}{3}v} \leq \frac{1}{6}$$

Jedoch:

$$\frac{1}{1 - \beta(\mathcal{L})} C(f^\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{12}{7} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{7} < \frac{4}{3} = C(f)$$

Folglich gilt [Satz 3.24](#) für keine sinnvolle Erweiterung der bisherigen Definitionen im Falle von allgemeinen unstetigen Latenzfunktionen.

## 6. Fazit

Bereits 1952 beschrieb [Wardrop](#), dass das Verhalten von Verkehrsteilnehmern in Verkehrsnetzen durch Nash-Equilibrien modelliert werden kann. Umgekehrt lassen sich auf diese Art und Weise Vorhersagen über zu erwartende Verkehrsflüsse anstellen. Dabei ist jedoch bekannt, dass Nash-Equilibrien im Allgemeinen keine optimale Lösung darstellen, im Falle von Verkehrsnetzen also nicht die Gesamtreisezeit minimiert wird.

Roughgarden & Tardos zeigten 2002, dass bei ausschließlich linearen Latenzfunktionen in einem Netzwerk ohne Kapazitätsbeschränkungen die Gesamtreisezeit eines Nash-Equilibriums maximal  $\frac{4}{3}$  der eines Systemoptimums sein kann. Roughgarden (2003) ergänzte später, dass der Preis der Anarchie sogar für alle Netzwerke mit ausschließlich differenzierbaren Latenzfunktionen, deren Produkte mit der Identität jeweils konvexe Funktion ergeben, unabhängig von der Netzwerktopologie ist. Der Preis der Anarchie bezeichnet dabei für ein fest gewähltes Netzwerk das maximale Verhältnis der Gesamtreisezeit eines Equilibriums zu der eines Systemoptimums.

In dieser Arbeit wurden die Ergebnisse von Correa *et al.* (2004) präsentiert, die die beschriebenen vorherigen Erkenntnisse erweitern: Lässt man nur bestimmte Equilibrien mit „guten“ Eigenschaften zu, so wurde für das erweiterte Modell von Netzwerken mit Kapazitätsbeschränkungen gezeigt, dass auch hier der Preis der Anarchie ausschließlich von den gewählten Latenzfunktionen abhängt. Diese Erkenntnis ist eine echte Erweiterung, da jedes Equilibrium eines Netzwerks ohne Kapazitätsbeschränkungen auch ein solches „gutes“ Equilibrium ist. Insbesondere lässt sich ein derartiges Equilibrium in Netzwerken mit Kapazitätsbeschränkungen effizient berechnen – etwa das in der Arbeit vorgestellte BMW-Equilibrium.

Schließlich wurde für einige wichtige Mengen von Latenzfunktionen gezeigt, wie sich der höchstmögliche Preis der Anarchie bestimmen lässt. Das Hauptergebnis dieser Arbeit, die ausschließliche Abhängigkeit des Preises der Anarchie von der gewählten Menge der Latenzfunktionen, wurde darüber hinaus auch auf linkssteigende Latenzfunktionen übertragen – jeweils vorausgesetzt, man beschränkt sich auf BMW-Equilibrien.

## Abbildungsverzeichnis

2.1	Einfaches Netzwerk ohne Kapazitätsbeschränkungen . . . . .	5
2.2	Braess' Paradoxon . . . . .	8
3.1	Einfaches Netzwerk mit Kapazitätsbeschränkungen . . . . .	10
3.2	Netzwerk mit verschiedenen Benutzer-Equilibrien . . . . .	11
3.3	Netzwerk mit Preis der Anarchie größer als $\frac{1}{2}M$ . . . . .	12
3.4	„Unnatürliches“ Equilibrium mit Kapazitätsbeschränkungen . . . . .	13
3.5	Einfaches Netzwerk mit Kapazitätsbeschränkungen . . . . .	17
3.6	Latenzfunktionen und Grenzkosten . . . . .	20
5.1	Kein Benutzer-Equilibrium in einfachem Netzwerk mit unstetigen Latenzfunktionen . . . . .	24

## Literatur

- M. J. BECKMANN, C. B. MCGUIRE & C. B. WINSTEN (1956). *Studies in the Economics of Transportation*. Yale University Press, New Haven, CT. 6, 13, 14, 16
- D. BERNSTEIN & T. E. SMITH (1994). Equilibria for networks with lower semicontinuous costs: With an application to congestion pricing. *Transportation Science* **28**, 221–235. 24
- JOSÉ R. CORREA, ANDREAS S. SCHULZ & NICOLÁS E. STIER-MOSES (2004). Selfish Routing in Capacitated Networks. *Mathematics of Operations Research* **29**(4), 961–976. ISSN 0364-765X. 3, 4, 7, 9, 28
- J. F. NASH (1951). Non-cooperative games. *Annals of Mathematics* **54**(2), 286–295. 3
- TIM ROUGHGARDEN (2003). The price of anarchy is independent of the network topology. *Journal of Computer and System Sciences* **67**(2), 341–364. ISSN 0022-0000. URL [http://dx.doi.org/10.1016/S0022-0000\(03\)00044-8](http://dx.doi.org/10.1016/S0022-0000(03)00044-8). 3, 7, 20, 21, 28
- TIM ROUGHGARDEN & ÉVA TARDOS (2002). How bad is selfish routing? *Journal of the ACM* **49**(2), 236–259. ISSN 0004-5411. URL <http://doi.acm.org/10.1145/506147.506153>. 3, 7, 8, 27, 28
- JOHN GLEN WARDROP (1952). Some theoretical aspects of road traffic research. In *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, volume 1, 325–378. 3, 27

---

FLORIAN SCHOPPMANN  
 Dörener Weg 61  
 33100 Paderborn  
 fschopp@upb.de