

Zusammenfassung Numerik

1. Einführung

Ziele: Entwicklung von numerisch stabilen und effizienten Algorithmen

Näherungsweise Lösungen von Problemen

Anwendungsbeispiele: Bestimmte Integration, wenn keine Formel für Stammfunktion vorhanden, Lösung von nicht-linearen Gleichungssystemen, Approximation von (unbekannten) Funktionen, etc.

2. Rechnerarithmetik

2.1 Gleitpunktzahlen

Menge der Gleitpunktzahlen $\mathbb{F} := \mathbb{F}(b, p, e_{min}, e_{max}) \subset \mathbb{R}$ mit b Basis, p Mantissenlänge, e_{min}/e_{max} min./max. Exponenten. Bei normalisierter Darstellung (IEEE) zur Basis $b = 2$ ist die erste Dezimalstelle der Mantisse jeder Zahl $\neq 0$ immer 1 und wird aus Speicher-Effizienzgründen nicht mit gespeichert.

Maschinengenauigkeit μ $0 < \mu \in \mathbb{F}$: kleinste Zahl mit $1 \oplus \mu > 1$

Rundung 1. eigentliche 2. Abrundung (chop)

Lemma: Der relative Rundungsfehler ist durch die Maschinengenauigkeit beschränkt

Lemma: Gleitpunktarithmetik ist i. A. nicht assoziativ.

Festlegungen: $\frac{x}{0} = \pm \text{Inf}$, wenn $x \neq 0$, $\frac{0}{0} = \text{NaN}$

2.2. Berechnung von Summen

„Phänomen“ Auslöschung durch Subtraktion

3. Polynom-Interpolation

Definition: $P_n :=$ der \mathbb{R} -Vektorraum aller Polynome vom Grad $< n$, $\dim(P_n) = n + 1$

3.1 Polynomauswertung nach Horner

Sei $f \in P_n$. Auswertung von f nach Horner: $f(x_0) = ((\dots((a_0x_0 + a_{n-1})x_0 + a_{n-2})x_0 + \dots)x_0 + a_1)x_0 + a_0$ (\rightsquigarrow je n Multiplikationen und Additionen)

Berechnung eines $g \in P_{n-1}$, $g(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$ mit $f(x) = (x - x_0)g(x) + f(x_0)$:

Eingabe: a_n, \dots, a_0, x_0

Ausgabe: $b_{n-1}, \dots, b_0, f(x_0)$

- 1: $b_{n-1} := a_n$
- 2: **for** $j = n - 1, \dots, 1$ **do**
- 3: $b_{j-1} := a_j + x_0 b_j$
- 4: **end for**
- 5: $f(x_0) := a_0 + x_0 b_0$

3.2 Das Interpolationspolynom

Abbildung $y; X := \{x_0, \dots, x_n\} \rightarrow \mathbb{R}, y(x_j) = y_j$

Definition: $X \subset \mathbb{R}$ heißt Knotenmenge, ihre Elemente x_j Knoten

Satz: Zu einer $(n+1)$ -el. Wertetabelle gibt es genau ein interpolierendes Polynom vom Grad $\leq n$. Dieses Polynom heißt Interpolationspolynom.

Lagrange'sche Interpolationsmethode:

$$p(x) = y_0 L_0(x) + \dots + y_n L_n(x) \in \mathbb{R} \in P_n$$

3.3 Newton'sche Interpolationsformel

Newton'sche Interpolationsmethode: $p(x) = \sum_{i=0}^n c_i N_i(x)$

Definition: Sei $p \in P_n$ das Interpol'polynom zu einer $(n+1)$ -el. Wertetabelle (y) . Der führende Koeffizient a_n von p heißt n -te dividierte Differenz von (y) . $\delta^n y[x_0, \dots, x_n] := a_n$

Satz: Es gilt: $c_i = \delta^i y[x_0, \dots, x_i]$

Bemerkungen: Das Bestimmen eines Interpolationspolynoms $p \in P_n$ entspricht der Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ep = y$, wobei $E : P_n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $E(q) := (q(x_0), \dots, q(x_n))$. E ist ein lin. Isomorphismus.

3.4 Der Interpolationsfehler

Satz: Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ $(n+1)$ -mal stetig diff'bar auf I , (y) die Wertetabelle von f bzgl. $\{x_0, \dots, x_n\} \subset I$. Sei $p \in P_n$ das Interpol'polynom von (y) . Sei $x \in I$.

Dann ex. $\xi \in \overset{\circ}{I}$ mit $f(x) - p(x) = \omega(x) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$ mit $\omega(x) := \prod_{i=0}^n (x - x_i) \in P_{n+1}$

Numerik – Prof. Dr. Sönke Hansen, Zusammenfassung von Florian Schoppmann

Das Copyright für die dieser Zusammenfassung zugrunde liegenden Vorlesungsunterlagen (Skripte, Folien, etc.) liegt beim Dozenten. Darüber hinaus bin ich, Florian Schoppmann, alleiniger Autor dieses Dokuments und der genannte Dozent ist in keiner Weise verantwortlich. Etwaige Inkorrektheiten sind mit sehr großer Wahrscheinlichkeit erst durch meine Zusammenfassung/Interpretation entstanden.

3.5 Tschebyscheff-Polynome

Satz: T_j hat für $j \geq 1$ genau j Nullstellen und $j+1$ Extremstellen in $] -1, 1[$

Satz: Sei $q \in P_n$ ($n \geq 1$) mit führendem Koeffizienten 2^{n-1} . Ist $q \neq T_n$, so gilt:

$$\max_{x \in [-1, 1]} |q(x)| \geq \max_{x \in [-1, 1]} |T_n(x)|$$

Definition: Die Nullstellen $x_0 < \dots < x_n$ von $T_{n+1} \in P_{n+1}$ heißen Tschebyscheff-Knoten (der Ordnung $n+1$): $x_j = \cos(\frac{2(n-j)+1}{2n+2}\pi)$ für $j = 0, 1, \dots, n$

Satz: Für eine $(n+1)$ -el. Knotenmenge $\{x_0, \dots, x_n\}$ wird die Max.-Norm des Fehlerpolynoms $\omega(x)$, d.h. $\max_{|x| \leq 1} |\omega(x)|$, minimal genau dann, wenn diese Knoten die Tschebyscheff-Knoten sind.

Satz: $T - 0, \dots, T_n$ bilden eine Orthonormalbasis für $(P_n, \langle \star, \star \rangle)$. Genauer: $\langle T_i, T_j \rangle =$

$$\begin{cases} 0 & \text{wenn } i \neq j \\ \pi & \text{wenn } i = j = 0 \\ \pi/2 & \text{wenn } i = j > 0 \end{cases}$$

$$\langle p, q \rangle := \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} p(x)q(x)dx, p, q \in C[-1, 1]$$

Algorithmus zur Bestimmung der Tschebyscheff-Koeffizienten

Eingabe: Koeffizienten a_n, \dots, a_0 der Monom-Darstellung eines Polynoms p

Ausgabe: Koeffizienten c_i, \dots, c_0 der Tschebyscheff-Darstellung des Polynoms p

- 1: **for** $k = n, \dots, 1$ **do**
- 2: $c_k := \frac{a_k}{2^{k-1}}$ {weil 2^{k-1} der führende Koeff. von T_k ist}
- 3: $\sum_{j=0}^{k-1} a_j x^j := \sum_{j=0}^k a_j x^j - c_k T_k(x)$ {Gemeint ist eine Zuweisung an die Koeffizienten a_j . $T_k(x)$ ist in Monomdarst. mit Hilfe der Rekursionsformel umwandelbar}
- 4: **end for**

Bemerkungen: Man könnte prinzipiell auch $c_k = \frac{2}{\pi} \langle p, T_k \rangle$ rechnen.

Clenshaw-Algorithmus:

Eingabe: Koeffizienten c_n, \dots, c_0 der Tschebyscheff-Darstellung eines Polynoms p , Stelle $t \in \mathbb{R}$

Ausgabe: $p(t)$

- 1: $a_{n+2} := a_{n+1} := 0$
- 2: **for** $k := n, \dots, 0$ **do**
- 3: $a_k := c_k + 2ta_{k+1} - a_{k+2}$
- 4: **end for**
- 5: $p(t) := a_0 - a_1 t$

4. Lineare Gleichungssysteme

Anwendungsbeispiel: Diskretisierung von Randwertproblemen:

$$\begin{cases} -x''(t) + q(t)x(t) = b(t) & \text{für } 0 < t < 1 \\ x(0) = x(1) = 0 \end{cases}$$

Gesucht: $x \in C^2[0, 1]$, welche das Gleichungssystem löst

Ersatzproblem: Einführung eines Gitters (Diskretisierung)

4.1 Gestaffelte Systeme

Vorwärtssubstitution: Rechenaufwand N (jede Gleitpunkt-Operation verursacht Kosten 1) bei sowohl n Gleichungen und Unbekannten:

$$N = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \mathcal{O}(n) \text{ für } n \rightarrow \infty$$

Definition: Eine Dreiecksmatrix, deren Diagonalelemente sämtlich 01 sind, heißt unipotent.

Satz: (Eigenschaften von Dreiecksmatrizen) Seien L, L' untere Dreiecksmatrizen. Dann gilt:

- i) $L \cdot L'$ untere Dreiecksmatrix
- ii) L invertierbar \iff alle Diagonalelemente von L sind $\neq 0$
- iii) L invertierbar $\implies L^{-1}$ untere Dreiecksmatrix

Satz: Menge aller unteren Dreiecksmatrizen bildet eine Untergruppe von $GL(n)$

4.2 Blockdarstellung von Matrizen

Sind Matrizen A, B in Blockdarstellung mit Untermatrizen gegeben, so lässt sich mit diesen Untermatrizen das Produkt AB nach Definition des gewöhnlichen Matrizenprodukts ausrechnen. (Vorausgesetzt das Format passt.) Relle Zellen kann wir als 1×1 -Matrizen ansehen.

4.3 Cholesky-Algorithmus

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Definition: A heißt positiv definit, gdw. gilt: $x^T A x > 0 \forall 0 \neq x \in \mathbb{R}^n$.

Anwendungsbeispiel: für spd-Matrizen: $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ mit $\lambda_i > 0$, $A = BB^T$ mit $B \in \times$ invert.

Aus der linearen Algebra ist bekannt:

- i) Symmetrische Matrizen haben reelle EWw
- ii) Spektralsatz

Numerik – Prof. Dr. Sönke Hansen, Zusammenfassung von Florian Schoppmann

Das Copyright für die dieser Zusammenfassung zugrunde liegenden Vorlesungsunterlagen (Skripte, Folien, etc.) liegt beim Dozenten. Darüber hinaus bin ich, Florian Schoppmann, alleiniger Autor dieses Dokuments und der genannte Dozent ist in keiner Weise verantwortlich. Etwaige Inkorrektheiten sind mit sehr großer Wahrscheinlichkeit erst durch meine Zusammenfassung/Interpretation entstanden.

- iii) A ist spd $\iff A$ ist symmetrisch und alle EWe > 0
- iv) A spd $\implies A$ invert. (da 0 kein EW)
- v) A spd $\implies \langle \star, \star \rangle_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \langle x, y \rangle_A := x^T A y$ ist Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n

Satz: Eine spd-Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ hat folgende Eigenschaften:

- i) $a_{ii} > 0$ für $i = 1, \dots, n$
- ii) $|a_{ij}|^2 \leq a_{ii} a_{jj}$ für $i, j = 1, \dots, n$
- iii) $\max_{i,j} |a_{ij}| = \max_i |a_{ii}|$
- iv) Liegt A in Blockdarstellung vor, d. h. $A = (A_{ij})_{i,j=1,\dots,k}$ und sind A_{ii} quadratisch, dann gilt A_{ii} spd für $i = 1, \dots, n$

Satz: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ spd. Dann gibt es genau eine untere Dreiecksmatrix L , deren Diagonalelemente > 0 sind, mit $A = LL^T$

Definition: Die im Satz angegebene Zerlegung $A = LL^T$ heißt Cholesky Zerlegung für A . L heißt Cholesky-Faktor.

Algorithmus:

Eingabe: spd-Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ **Ausgabe:** $L = (l_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $A = LL^T$

- 1: $L := 0$
- 2: **for** $k := 1, \dots, n$ {Spaltenzähler} **do**
- 3: $l_{kk} := \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2}$
- 4: **for** $i := k + 1, \dots, n$ {Zeilenzähler} **do**
- 5: $l_{ik} := (a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij} l_{kj}) / l_{kk}$
- 6: **end for**
- 7: **end for**

Bemerkungen: Cholesky funktioniert nur für spd-Matrizen. Umgekehrt: Funktioniert der Alg. für Matrix A , so ist A spd.

Rationale Cholesky-Zerlegung $A = L_1 D L_1^T = (L_1 \sqrt{D})(L_1 \sqrt{D})^T = LL^T$, wobei L_1 unipotente untere Dreiecksmatrix, D Diagonalmatrix

Vorgehensweise zur Lösung von $Ax = b$: 1.) Bestimme $A = LL^T$. 2.) Löse $Ly = b$. 3.) Löse $L^T x = y$

4.4 Die LR-Zerlegung

Ist A eine allgemeine Matrix, so gibt es i. A. keine Zerlegung $A = LR$, wobei L untere und R obere Dreiecksmatrix.

Definition: Eine Matrix P heißt Permutationsmatrix, wenn es eine Permutation σ gibt, so dass die zu P gehörige lineare Abbildung lautet: $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longrightarrow Px = \begin{pmatrix} x_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ x_{\sigma(n)} \end{pmatrix}. \text{ Wir schreiben: } P_\sigma := P.$$

Ist σ eine Vertauschung, so heißt P_σ Vertauschungsmatrix.

Satz: Permutationsmatrizen haben folgende Eigenschaften:

- i) Die Permutationsmatrizen bilden eine Untergruppe von $GL(n)$
- ii) Jede Perm'matrix ist das Produkt aus Vertauschungsmatrizen
- iii) Perm'matrizen sind orthogonal, d. h. $P^T = P^{-1}$
- iv) P_σ besteht nur aus 0 und 1 in seinen Komponenten, und jede Zeile und Spalte hat jeweils nur ein Element = 1
- v) Sei $P = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0^T \\ \hline 0 & P' \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($P' \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$)

eine Permutationsmatrix und $L = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0^T \\ \hline l & I \end{array} \right)$,

$$L' = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0^T \\ \hline l' & I \end{array} \right).$$

Dann gilt: $PL = L'P \iff l' = P'l$

Definition: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar. Eine Zerlegung $PA = LR$, L unipotente linke untere Dreiecksmatrix, andere Bezeichnungen wie zuvor, heißt LR-Zerlegung für A . (PA ist zeilenvertauschte Matrix A).

Satz: Jede invert. Matrix besitzt eine LR-Zerlegung

Algorithmus ohne Zeilenvertauschungen:

Eingabe: Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Ausgabe: Matrizen $L = (l_{ij}), R = (r_{ij})$ (Überschreibt Eingabe)

- 1: **for** $k := 1, \dots, n - 1$ {Spaltenzähler} **do**
- 2: **for** $i := k + 1, \dots, n$ {Zeilenzähler} **do**
- 3: $l_{ik} := a_{ik} / a_{kk}$
- 4: **for** $j := k, \dots, n$ **do**
- 5: $a_{ij} := a_{ij} - l_{ik} a_{kj}$ {so dass in der k -ten Spalte von A unterhalb der Hauptdiagonalelemente nur noch 0 stehen}
- 6: **end for**
- 7: **end for**
- 8: **end for**
- 9: Setze $l_{ii} := 1$
- 10: Setze $r_{ij} := a_{ij}$ für $j \geq i$

Numerik – Prof. Dr. Sönke Hansen, Zusammenfassung von Florian Schoppmann

Das Copyright für die dieser Zusammenfassung zugrunde liegenden Vorlesungsunterlagen (Skripte, Folien, etc.) liegt beim Dozenten. Darüber hinaus bin ich, Florian Schoppmann, alleiniger Autor dieses Dokuments und der genannte Dozent ist in keiner Weise verantwortlich. Etwaige Inkorrektheiten sind mit sehr großer Wahrscheinlichkeit erst durch meine Zusammenfassung/Interpretation entstanden.

Lemma: Der LR -Algorithmus kann für die Berechnung der Determinante verwendet werden: $PA = LR \implies \det A = (-1)^s \det R = (-1)^s \cdot r_{11} \cdots r_{nn}$, $s = \text{sign}(\sigma)$. Denn: $\det L = 1$ und $\det LR = \det L \cdot \det R$

Es gibt für den LR -Algorithmus verschiedene Privotstrategien, die beschreiben, wie der Pivotindex $p_k > k$ gewählt werden soll, der im k -ten Schritt zur Vertauschung der p -ten mit der k -ten Zeile der (aktuellen) Matrix A führt.

Anwendungsbeispiel: Spaltenpivotstrategie
Wähle p_k so, dass $|a_{pk}|$ maximal wird.

Diagonalstrategie $p_k = k$. Entspricht keiner Vertauschung und ist daher nicht immer durchführbar.

Definition: Eine Matrix $A = (a_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n})$ heißt strikt diagonaldominant, wenn gilt:

$$|a_{ij}| > \sum_{k=1, k \neq i}^n |a_{ik}| \text{ für } i = 1, \dots, n$$

Satz: Strikt Diagonaldominant \implies invertierbar, LR -Alg. mit Diagonalstrategie anwendbar

4.5 Kondition einer Matrix

Motivation: Aufschluss über die Frage, wie empfindlich die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ für ein LGS $Ax = b$ von Fehlern in A und b abhängt, d. h. wie groß ist der Fehler $\hat{x} - x$ bei der Lösung von $\hat{A}\hat{x} = \hat{b}$. Idee: Normen.

Satz: (aus der Analysis II) Sei $\|\star\|$ eine Norm auf \mathbb{R}^n . Dann definiert

$$\|\star\|_* := \sup_{\|x\|=1} \|\star x\| \quad (= \sup_{\|x\| \leq 1} \|\star x\| = \sup_{0 \neq x \in \mathbb{R}^n} \frac{\|\star x\|}{\|x\|})$$
 eine Norm auf $\mathbb{R}^{n \times n}$ – die zu $\|\star\|$ gehörige Operator-/Matrixnorm.

Anwendungsbeispiele: für Normen: Zeilensummennorm, Spaltensummennorm, die zur eukl. Norm gehörende Matrixnorm: $\|A\|_2 = \sqrt{\text{größter Eigenwert von } A^T A}$

Definition: Sei $\|\star\|$ eine Matrix-Norm auf $\mathbb{R}^{n \times n}$. Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nennt man $\kappa(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ die Kondition von A . $\kappa(A) := +\infty$, falls A nicht invert.

Satz: (Betrachtung des Falls, in dem nur das b eines LGS wie oben nicht genau bekannt ist.) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Ax = b$ und $\hat{A}\hat{x} = \hat{b}$, wobei $b \neq 0$. Dann gilt: $\frac{\|\hat{x} - x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|\hat{b} - b\|}{\|b\|}$.

Satz: i) $\kappa(\lambda A) = \kappa(A)$ für $\lambda \neq 0$

ii) $\kappa(A) \geq 1$

Satz: (Abschätzung über Fehler in A und b , LGS wie zuvor). Es gelte:

$$\frac{\|\hat{A} - A\|}{\|A\|} < \frac{1}{2\kappa(A)}.$$

$$\text{Dann folgt: } \frac{\|\hat{x} - x\|}{\|x\|} \leq 2\kappa(A) \left[\frac{\|\hat{A} - A\|}{\|A\|} + \frac{\|\hat{b} - b\|}{\|b\|} \right]$$

4.6 Fehleranalyse

Vorwärtsanalyse: Schätze $\|\hat{x} - x\|$ absolut oder relativ ($\frac{\|\hat{x} - x\|}{\|x\|}$) ab.

Rückwärtsanalyse: Betrachte \hat{x} als Lösung eines geänderten Verfahrens $\hat{x} = \hat{b}$. Stelle Abschätzungen auf: $\frac{\|\hat{A} - A\|}{\|A\|} \leq \epsilon$ und $\frac{\|\hat{b} - b\|}{\|b\|} \leq \epsilon$.

4.7 Die QR -Zerlegung

Eine orthogonale Matrix Q ($Q^T = Q^{-1}$) lässt das Skalarprodukt invariant, d. h. $\langle Qx, Qy \rangle = \langle x, y \rangle$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Definition: Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt eine Zerlegung $A = QR$, mit $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonal und R oberer Dreiecksmatrix, eine QR -Zerlegung von A .

Definition: Eine matrix $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ der Gestalt $H = I - 2uu^T$, mit $u \in \mathbb{R}^n, \|u\|_2 = 1$ heißt Reflexions- oder Householder-Matrix.

Satz: Eigenschaften einer Householder-Matrix H :

- $H^T = H$ (H ist symmetrisch)
- H ist orthogonal
- $H^2 = I$ (H ist idempotent)
- H lässt die Hyperebene $E := u^\perp$ (= Menge aller auf U senkrecht stehender Vektoren) punktweise fest.
- Hx und x haben für jedes $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$ denselben Abstand von E , die Verbindungsgerade zwischen x und Hx steht senkrecht auf E .

Satz: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar. Dann besitzt A eine QR -Zerlegung $A = QR$. R kann so gewählt werden, dass alle Diagonalelemente > 0 .

5. Iterative Lösung von Gleichungen

Motivation: $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben. Gesucht: Lösung $x \in D$ mit $f(x) = y$ für ein $y \in \mathbb{R}^n$.

Idee: Iterationsverfahren mit Abbruchbedingung

Das Copyright für die dieser Zusammenfassung zugrunde liegenden Vorlesungsunterlagen (Skripte, Folien, etc.) liegt beim Dozenten. Darüber hinaus bin ich, Florian Schoppmann, alleiniger Autor dieses Dokuments und der genannte Dozent ist in keiner Weise verantwortlich. Etwaige Inkorrektheiten sind mit sehr großer Wahrscheinlichkeit erst durch meine Zusammenfassung/Interpretation entstanden.

5.1 Das Fixpunktverfahren

Definition: Eine Gleichung der Form $x = \phi(x)$ heißt Fixpunktgleichung. Dabei ist $\phi : A \rightarrow A$ eine gegebene Funktion.

Anwendungsbeispiel: $f(x) := e^{-x} - x = 0 \implies x = e^{-x}$ oder

$f(x) = 0 \implies x = x \pm f(x)$ oder

$f(x) = 0 \implies x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ (falls $f'(x) \neq 0$)

Definition: Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ und $\phi : A \rightarrow A$. Man nennt ϕ eine strikte Kontraktion, wenn es ein $0 < \alpha < 1$ gibt mit

$$\|\phi(x) - \phi(y)\| \leq \alpha \|x - y\| \text{ für alle } x, y \in A$$

Satz: (Banach'scher Fixpunkt:) A sei abgeschlossen und ϕ eine strikte Kontraktion. Dann ex. genau ein Fixpunkt x^* für ϕ . Jede Iterationsfolge $\subset A$ des Fixpunktverfahrens konvergiert gegen x^* .

Satz: (über die Kontraktionseigenschaft) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex. Sei $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig diff'bar mit $a := \sup_{x \in U} \|\phi'(x)\| < 1$. Dann ist ϕ eine strikte Kontraktion. (Gilt für jede Matrixnorm auf \mathbb{R}^n)

Definition: Eine gegen $x^* \in \mathbb{R}^n$ konvergente Folge $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ heißt konvergent mit einer Ordnung $p \geq 1$, falls es eine Konstante $c > 0$ gibt, so dass:

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq c \|x_k - x^*\|^p \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Falls $p = 1$ (mind. lineare Konvergenz) muss zusätzlich gelten: $c < 1$. Quadratische Konvergenz: $p = 2$

Satz: Sei $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ 2-mal stetig diff'bar in einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$. Sei x^* ein Fixpunkt für ϕ und $(x_k) \subset U$ eine Fixpunktfolge mit Grenzwert x^* . Dann gilt für die Fehler $e_k := x_k - x^*$:

$$e_{k+1} = \phi'(x^*)e_k + \mathcal{O}(\|e_k\|^2) \text{ für } k \rightarrow \infty$$

Folgerung: (Bez. wie im Satz) i) $\|\phi'(x^*)\| < 1 \implies (x_k)$ mind. lin. konvergent ii) $\phi'(x^*) = 0 \implies (x_k)$ quadr. konvergent

5.2 Das Newton'sche Verfahren

Definition: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n, D \subset \mathbb{R}^n$ stetig diff'bar. Dann heißt die Vorgehensweise (sofern durchführbar):

Für $k = 0, 1, \dots$: Setze $x_{k+1} := x_k - (f'(x_k))^{-1}f(x_k)$ mit Startwert $x_0 \in D$

Newton'sches Verfahren. Das Verfahren heißt konvergent, wenn (x_k) gegen eine Nullstelle von f konvergiert.

Satz: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n, D \subset \mathbb{R}^n$ offen, 2-mal stetig diff'bar und $x^* \in D$ mit $f(x^*) = 0$ sowie $f'(x^*)$ invertierbar (einfache Nullstelle!). Dann gibt es ein $r > 0$, so dass $\forall x_0 \in D, \|x_0 - x^*\| < r$: die Newton-Folge (x_k) definiert ist und quadratisch gegen x^* konvergiert.

5.3 Nullstellen von Polynomen

Satz: Sei p ein reelles Polynom vom Grade $n \geq 1$, das nur reelle Nullstellen $\xi_n < \dots < \xi_1$ besitzt. Dann konvergiert das Newton'sche Verfahren für Startwerte $x_0 > \xi_1$ monoton und quadratisch gegen ξ_1 .

Bemerkungen: Idee zur Bestimmung von ξ_2, \dots, ξ_n : Jeweils Polynomdivision. Problem dabei: Nicht exakt.

Newton-Meahly-Verfahren: Berechnung von ξ_1 wie vorher. Anschließend Anwendung des Newton-Verfahrens auf $p_1(x) := \frac{p(x)}{x - \xi_1} = 0$ an (ohne dabei eine Polynomdivision durchzuführen).

Bairstow-Verfahren zur Bestimmung der komplexen Nullstellen $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ eines reellen Polynoms: Spalte ein quadratisches Polynom mit reellen Koeffizienten ab:

$$p(x) = p_1(x) \cdot \underbrace{(x^2 - rx - q)}_{=(x-\lambda)(x-\bar{\lambda})}, \text{ wobei } r = \lambda + \bar{\lambda}, q =$$

$$-|\lambda|^2$$

Zur Bestimmung von r, q wendet man das Newton'sche Verfahren auf eine geeignete Nullstellengleichung $F(r, q) = 0, F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ an:

$$F(r, q) = (A, B) : \iff p(x) = p_1(x)(x^2 - rx - q) + \underbrace{(Ax + B)}_{\text{Divisionsrest}}$$

Divisionsrest

5.4 Iterationsverfahren für lineare Systeme

Jacobi- bzw. Gesamtschrittverfahren: Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $a_{ii} \neq 0$. Fixpunktiteration: Zerlege additiv: $A = L + D + U$, mit L unterer, R oberer Dreiecksmatrix, $D = \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$. Wähle Startwert $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Für $k = 0, 1, \dots$: Setze $x_{k+1} = -D^{-1}(L + U)x_k + D^{-1}b$.

Denn: $Ax = b \iff Dx = -Lx - Ux + b \iff x = -D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b$

Satz: Ist A strikt diagonaldominant, dann konvergiert das Jacobi-Verfahren für jedes b und jeden Startwert x_0 .

Numerik – Prof. Dr. Sönke Hansen, Zusammenfassung von Florian Schoppmann

Das Copyright für die dieser Zusammenfassung zugrunde liegenden Vorlesungsunterlagen (Skripte, Folien, etc.) liegt beim Dozenten. Darüber hinaus bin ich, Florian Schoppmann, alleiniger Autor dieses Dokuments und der genannte Dozent ist in keiner Weise verantwortlich. Etwaige Inkorrektheiten sind mit sehr großer Wahrscheinlichkeit erst durch meine Zusammenfassung/Interpretation entstanden.

Gauß-Seidel- bzw. Einzelschrittverfahren: Fixpunktfolge: $x_{k+1} = D^{-1}(b - Lx_{k+1} - Ux_k)$

Definition: Sei $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Die reelle Zahl $\rho(B) := \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathbb{C} \text{ Eigenwert von } B\}$ heißt Spektralradius von B .

Satz: Sei $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$. $\forall z, x_0 \in \mathbb{C}^n$: Das Fixpunktverfahren für $x = Bx + z$ konvergiert $\iff \rho(B) < 1$

Bemerkungen: Die Konvergenzgeschwindigkeit konvergiert umso schneller, desto kleiner $\rho(B)$

Successive Overrelaxation-Verfahren (SOR): Relaxationsparameter ω : Iterationsschritt: $(D + \omega L)x_{k+1} = ((1 - \omega)D - \omega U)x_k + \omega b$ ($k = 0, 1, \dots$)

6. Fehleranalyse

6.1 Fehlerquellen

i) Eingabe-/Datenfehler. ii) Rundungsfehler (Gleitpunktarithmetik) iii) Verfahrensfehler durch Lösen eines Ersatzproblems (Bsp.: Quadraturformeln)

6.2 Die Kondition eines Problems

Viele Berechnungsaufgaben kann man ansehen als die Aufgabe, eine Funktion f an einer Stelle x auszuwerten. Bsp. LGS $Ax = b$: Funktion $b \rightarrow A^{-1}b$

Definition: Für ein Problem (f, x) , dessen Lösung die Auswertung von f an der Stelle x ist, sagt man, dass die absolute Kondition $\leq \kappa_{abs}$ ist ($\kappa_{abs} \geq 0$), wenn gilt:

$$\|f(\hat{x}) - f(x)\| \leq \kappa_{abs} \|\hat{x} - x\| + o(\|\hat{x} - x\|) \text{ für } \hat{x} \rightarrow x$$

Entsprechend ist die relative Kondition $\leq \kappa_{rel}$, wenn gilt:

$$\frac{\|f(\hat{x}) - f(x)\|}{\|f(x)\|} \leq \kappa_{rel} \frac{\|\hat{x} - x\|}{\|x\|} + o\left(\frac{\|\hat{x} - x\|}{\|x\|}\right) \text{ für } \hat{x} \rightarrow x$$

Schätzung der Kondition eines Problems mit der differentiellen Fehleranalyse: Schätze für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x_1, \dots, x_n)$, Näherungswert $\hat{y} = f(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$, mit Taylorentwicklung unter Vernachlässigung quadratischer Glieder ab:

$$\hat{y} \approx y + \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} (\hat{x}_i - x_i)}_{\text{abs. Fehler}}$$

$$\text{Rel. Fehler } \frac{\hat{y} - y}{y} \approx \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{y} \underbrace{\frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i}}_{\substack{\text{Fehler-} \\ \text{verstärkungs-} \\ \text{faktoren}}} \frac{\hat{x}_i - x_i}{x_i}$$

6.3 Numerische Stabilität

Satz: Die Kondition ist submultiplikativ, d. h. $\kappa(g \circ h, x) \leq \kappa(g, h(x)) \cdot \kappa(h, x)$

Definition: Ein Algorithmus für ein Problem (f, x) , $f = f_n \circ \dots \circ f_1$, wobei $\kappa_i = \kappa(f_i, x_i)$ und $x_{i+1} = f(x_i)$, $x_1 = x$, heißt numerisch stabil, wenn für kleines $c \geq 1$ gilt:

$$\kappa \leq \prod_{i=1}^n \kappa_i \leq c \cdot \kappa$$

6.4 Numerisches Differenzieren

Für eine Funktion $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ soll $f'(x)$ durch $d(x) := \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ näherungsweise berechnet werden. Faustregel: Wähle $h \approx \sqrt{\mu}$.

7. Numerische Integration

Eigenschaften des Integrals: Linearität, Monotonie/Positivität, Additivität, Substitution

7.1 Die Trapezregel

Trapezregel: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. $I = I(f) := \int_a^b f(x) dx$ werde durch $T = T(f) := \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$ approximiert.

Satz: f sei sogar $C^2[a, b]$. $M := \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$. Dann gilt: $|I(f) - T(f)| \leq \frac{1}{12}(b-a)^3 \cdot m$.

Bemerkungen: $\frac{1}{12}$ ist optimale Abschätzung.

Zusammengesetzte Trapezregel: Zerlegung Z von $[a, b]$: $z : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$. Näherung $T_Z(f)$ für $I(f)$:

$$\sum_{i=1}^N \frac{x_i - x_{i-1}}{2} (f(x_i) + f(x_{i-1}))$$

Satz: Sei $f \in C^2[a, b]$, Z Zerlegung mit Feinheit h . Dann: $|I(f) - T_Z(f)| \leq \frac{1}{12}(b-a)h^2 \cdot M$, M wie im vorherigen Satz

7.2 Interpolatorische Quadraturformeln

Definition: Eine s -stufige Quadraturformel $Q = (b_i, c_i)_{i=1}^s$ besteht aus Knoten $c_1, \dots, c_s \in [0, 1]$, Gewichten $b_1, \dots, b_s \in \mathbb{R}$. Q ordnet einer Funktion $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ die Quadratur $Q(g) := \sum_{i=1}^s b_i g(c_i) \in \mathbb{R}$ zu.

Definition: Eine Quad'formel Q hat die Ordnung $p \in \mathbb{N}$, gdw. gilt: i) $I(g) = Q(g) \forall g \in P_{p-1}$ ii) $\exists g \in P_p$ mit $\text{grad}(g) = p$ und $I(g) \neq Q(g)$.

Numerik – Prof. Dr. Sönke Hansen, Zusammenfassung von Florian Schoppmann

Das Copyright für die dieser Zusammenfassung zugrunde liegenden Vorlesungsunterlagen (Skripte, Folien, etc.) liegt beim Dozenten. Darüber hinaus bin ich, Florian Schoppmann, alleiniger Autor dieses Dokuments und der genannte Dozent ist in keiner Weise verantwortlich. Etwaige Inkorrektheiten sind mit sehr großer Wahrscheinlichkeit erst durch meine Zusammenfassung/Interpretation entstanden.

Satz: Eine s -stufige Quad'formel $Q = (b_i, c_i)_{i=1}^s$ hat Ordnung $\geq s \iff b_i = \int_0^1 L_i(t) dt$ für $i = 1, \dots, s$

Definition: Quad'formeln Q mit äquidistanten Knoten heißen Newton-Cotes-Formeln.

Satz: (Testen der Ordnung einer Quad'formel) $Q = (b_i, c_i)_{i=1}^s$ hat Ordnung $\geq p \iff \sum_i b_i c_i^{q-1} = \frac{1}{q}$ für $q = 1, \dots, p$

Satz: Q Quad'formel wie zuvor mit Ordnung $\geq p$, $f \in C^p[a, b]$ und Z Zerlegung mit Feinheit $\leq h$. Dann:

$|I(f) - Q_Z(f)| \leq M \cdot (b-a)h^p \max_{a \leq x \leq b} |f^{(p)}(x)|$ für eine Konstante M .

Bemerkungen: Man kann $M \leq \frac{(1 + \sum_{i=1}^s |b_i|)}{p!}$ wählen.

Rechenaufwand: $|I(f) - Q_Z(f)| \approx ch^p$ für $h \rightarrow 0$. Bei Fehlertoleranz ϵ sollte also $ch^p \leq \epsilon$ ($\implies h \leq (\frac{\epsilon}{c})^{1/p}$) sein, d. h. $N = \frac{b-a}{h} \geq (b-a) (\frac{\epsilon}{c})^{1/p}$. Anzahl aller Funktionsauswertungen ist ca. Ns .

7.3 Gauß-Legendre-Quadraturen

Sei im folgenden Q eine Quad'formel wie zuvor.

Definiere vorab: $M(t) := \prod_{i=1}^s (t - c_i)$, $M \in P_s$

Satz: Q Quad'formel wie zuvor. Es gilt immer: $p \leq 2s$

Folgerung: Q hat Ordnung $p = 2s \iff p \geq s$ und M senkrecht auf $P_{s-1} \subset C[0, 1]$ bzgl. folgenden Skalarprodukts:

$\langle f, g \rangle_{C[a,b]} := \int_a^b f(x)g(x) dx \quad \forall f, g \in C[a, b]$

Bemerkungen: Gesucht ist nun also ein M (bzw. dessen Nullstellen) mit $M \perp P_{s-1}$

Satz: (Gramm-Schmidt-Orthogonalisierung) Betrachte $C[a, b]$ mit dem Skalarprodukt $\langle \star, \star \rangle$. Es gibt genau eine Folge p_0, p_1, \dots von Polynomen mit i) Grad von $p_k = k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit mit führendem Koeff. 1, sowie ii) $p_k \perp P_{k-1}$ für $k = 1, 2, \dots$

Satz: Sei $h \in P_k$, $h \perp P_{k-1} \subset C[a, b]$. Dann hat h in $]a, b[$ genau k verschiedene Nullstellen. Insb. gilt auch: $\text{grad}(h) = k$.

Satz: \exists Quad'formel Q der Ordnung $p = 2s$: Dazu muss gelten: i) Knoten c_i als Nullstellen von $\text{Leg}_s(2t - 1) = 0$ ii) Gewichte sind durch $p \geq s$ eindeutig festgelegt

Definition: Quad'formel der Ordnung $p = 2s$ nennt man Gauß-Legendre-Formeln.

7.4 Romberg-Quadratur

Idee: Betrachte $h \rightarrow T_h(f)$ und extrapoliere auf $h = 0$. Wähle dazu eine streng monoton fallende Folge (h_i) mit Grenzwert 0.

Satz: (asymptotische Entwicklung der Trapezregel): Sei $f \in C^{2m}[a, b]$. Dann gilt für $h \downarrow 0$: $T_h(f) = \int_a^b f(x) dx + \sum_{k=1}^{m-1} c_k h^{2k} + \mathcal{O}(h^{2m})$ (c_i sind hier ausschließlich von f abhängige Koeffizienten)

Romberg-Verfahren:

Eingabe: Funktion $f \in C^{2m}[a, b]$, Feinheit h , Stufe m

Ausgabe: Näherung R_h für $I(f)$

- 1: Berechne T_{h_i} für $i = 1, \dots, m$, wobei: $h_1 := h$, $h_{i+1} := \frac{h_i}{2} = 2^{-i}h$ für $i = 1, \dots, m-1$
- 2: Bestimme Interpolationspolynom $p \in P_{m-1}$ zur Wertetabelle:

h_1^2	h_2^2	\dots	h_m^2
T_{h_1}	T_{h_2}	\dots	T_{h_m}

- 3: Setze als Näherung $R_h := p(0)$

Bemerkungen: Schritte 2 und 3 kann man zusammenfassen, da man nur an $p(0)$ interessiert ist. (Algorithmus von Aitken Neville)

Satz: $|R_h - I| = \mathcal{O}(h^{2m})$ für $h \downarrow 0$

7.5 Adaptive Quadratur

Motivation: In der Nähe von Singularitäten des Integranden (Unstetigkeitsstellen, Knickstellen, etc.) sollte die Zerlegung möglichst fein sein, in den „glatten“ Bereichen möglichst grob.

adaptive Quadratur mittels Bisektion: (Auf Grundlage lokaler Fehlerabschätzung)

Algorithmus Quad

Eingabe: Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, Fehlertoleranz $\epsilon > 0$, Quadraturformel Q

Ausgabe: Näherung $I(f)$

- 1: **if** $\delta(a, b; f) \leq \epsilon$ **then**
- 2: Gebe $Q_a^b(f)$ zurück
- 3: **else**
- 4: $m := \frac{a+b}{2}$
- 5: Ausgabe: $Quad(f|_{[a,m]}, \epsilon, Q) + Quad(f|_{[m,b]}, \epsilon, Q)$
- 6: **end if**

Bemerkungen: Fehlerabschätzung $\delta(a, b; f)$ bspw. über Trapezregel mit zwei Schrittweiten h und $\frac{h}{2}$ oder über Vergleich Trapez-/Simpsonregel möglich.

Das Copyright für die dieser Zusammenfassung zugrunde liegenden Vorlesungsunterlagen (Skripte, Folien, etc.) liegt beim Dozenten. Darüber hinaus bin ich, Florian Schoppmann, alleiniger Autor dieses Dokuments und der genannte Dozent ist in keiner Weise verantwortlich. Etwaige Inkorrektheiten sind mit sehr großer Wahrscheinlichkeit erst durch meine Zusammenfassung/Interpretation entstanden.

8. Splines

Motivation: Mittels Polynomen kann man zwar beliebige stetige Funktionen auf einem Intervall $[a, b]$ gleichmäßig approximieren. Problem in der Praxis jedoch: „Welligkeit“ von Polynomen

8.1 Splines der Ordnung k

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $\Delta \subset I$ eine diskrete Menge (d. h. ohne Häufungspunkte).

Definition: Eine Funktion $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Spline der Ordnung $k \in \{2, 3, \dots\}$ auf I zur Knotenmenge Δ , wenn gilt: i) $s \in C^{k-2}(I)$ ii) In jedem Teilintervall $J \subset I \setminus \Delta$ ist $s|_J$ ein Polynom mit Grad $< k$. $S_{k,\Delta}$ oder $S_{k,\Delta}(I)$ bezeichnet die Menge aller Splines der Ordnung k auf I zu Δ .

Definition: Für $k \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{R}$ nennt man die Funktion $(\star - t)_+^k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$(\star - t)_+^k = \begin{cases} (x - t)^k & \text{wenn } x \geq t, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

die an der Stelle t abgebrochene k -te Potenz.

Satz: $(\star - t)_+^k$ ist $(k - 1)$ -mal stetig diff'bar. (k, r wie vorher)

Satz: $S_{k,\Delta}(I)$ ist ein \mathbb{R} -Vektorraum. Wenn Δ endl. mit l inneren Knoten, dann gilt $\dim S_{k,\Delta}(I) = k + l$. Eine Basis ist bspw.: $B := \{1, x^1, \dots, x^{k-1}, (x - x_1)_+^{k-1}, \dots, (x - x_l)_+^{k-1}\}$

Bemerkungen: B ist für numerische Zwecke nicht zu empfehlen.

8.2 Kubische Spline-Interpolation

Definition: Splines der Ordnung 4 heißen kubische Splines. Im Folgenden: $s_\Delta := s_{4,\Delta}$

Definition: Sei $f \in C^1[a, b]$. Ein kub. Spline $s \in S_\Delta$ heißt interpolierend für f , wenn gilt: $s(x_i) = f(x_i)$ für $i = 0, 1, \dots, l, l + 1$ und wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist: i) $s'(a) = f'(a)$, $s'(b) = f'(b)$ (vollständige Randbedingung) ii) $s''(a) = 0 = s''(b)$ (natürliche Randbedingung)

Satz: Sei $f \in C^2[a, b]$ und $s \in S_\Delta$ interpolierend für f . Dann gilt: $\int_a^b |s''(x)|^2 dx \leq \int_a^b |f''(x)|^2 dx$.

Satz: Ersetzt man f durch seinen interpolierenden Spline, so wird die mittlere Krümmung nicht vergrößert

Satz: Sei $f \in C^2[a, b]$. Dann gibt es genau einen vollständigen und genau einen natürlichen interpolierenden Spline für f .

Definition: Normen auf $C[a, b]$:

$$\|f\|_\infty := \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \text{ (Max.-Norm)}$$

$$\|f\|_{-2} := \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \text{ (L}^2\text{-Norm)}$$

Satz: Sei f wie zuvor und $s \in S_\Delta$ interpolierend für f . Dann gilt: $\|f - s\|_\infty \leq \frac{1}{2} h^{3/2} \|f''\|_2$

Satz: Sei $f \in C^4[a, b]$. Dann gilt: $\|f - s\|_\infty \leq \frac{5}{384} h^4 \|f^{(4)}\|_\infty$

Bemerkungen: Vergleiche Fehler bei Polynominterpolation (3.4): $\|f - p\|_\infty \leq \left(\max_{a \leq x \leq b} \omega(x) \right) \frac{1}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_\infty$

8.3 Uniforme B-Splines

Konstruktion der B-Splines mit dem Faltungsintegral: $(g * f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x - t) dt$ für $g, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Im Folgenden sei $\chi = 1_{[0,1]}$ (Indikatorfunktion)

Satz: Eigenschaften der Faltung:

- i) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig $\implies \chi * f$ diff'bar und $(\chi * f)'(x) = f(x) - f(x - 1)$
- ii) $f \in C^{k-2}(\mathbb{R}), k \geq 2 \implies \chi * f \in C^{k-1}(\mathbb{R})$
- iii) $s \in S_{k,\mathbb{Z}} \implies \chi * s \in S_{k+1,\mathbb{Z}}$
- iv) $\text{supp}(f) \subset [a, b] \implies \text{supp}(\chi * f) \subset [a, b + 1]$.
Hier ist $\text{supp}(f) := \overline{\{x \in \mathbb{R} | f(x) \neq 0\}}$ die Trägermenge von f .

Definition: Die B-Spline-Funktionen B_1, B_2, \dots sind rekursiv definiert durch $B_0 = \chi$ und $B_i = B_0 * B_{i-1}$ ($i = 1, 2, \dots$). Anders ausgedrückt: $B_j = \underbrace{\chi * \dots * \chi}_{(j+1)\text{-mal}}$

Satz: Für $j \in \mathbb{N}$ gilt:

- i) $B_j \in S_{j+1,\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$
- ii) $B_j \geq 0$
- iii) $\text{supp}(B_j) \subset [0, j + 1]$
- iv) $B'_j = B_{j-1} - B_{j-1}(\star - 1)$
- v) $\int_{-\infty}^{\infty} B_j(x) dx = 1$

Satz: (Teilung der 1) Für $j \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\sum_{i \in \mathbb{Z}} B_j(x - i) = 1$

Satz: Seien $k, l \in \mathbb{N}, k > 1$. Bzgl. der Zerlegung $\Delta : a = 0 < 1 < 2 < \dots < l < l + 1 = b$ des Intervalls $[a, b] = [0, l + 1]$ bilden die B-Splines $B_{k-1}(\star - i)$ für $i = -(k - 1), \dots, -1, 0, 1, \dots, l$ eine Basis des Splinesraums $S_{k,\Delta}[0, l + 1]$.

Numerik – Prof. Dr. Sönke Hansen, Zusammenfassung von Florian Schoppmann

Das Copyright für die dieser Zusammenfassung zugrunde liegenden Vorlesungsunterlagen (Skripte, Folien, etc.) liegt beim Dozenten. Darüber hinaus bin ich, Florian Schoppmann, alleiniger Autor dieses Dokuments und der genannte Dozent ist in keiner Weise verantwortlich. Etwaige Inkorrektheiten sind mit sehr großer Wahrscheinlichkeit erst durch meine Zusammenfassung/Interpretation entstanden.

A. Polynomdarstellungen

Sei $i \in \{0, \dots, n\}$. $X = \{x_0, \dots, x_n\}$ eine Knotenmenge.

Lagrange-Polynome: $L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$

Newton-Polynome: $N_i(x) = \prod_{k=0}^{i-1} (x-x_k)$, $N_0(x) = 1$

Tschebyscheff-Polynome: Definition auf $[-1, 1]$,
 $T_i(x) = \cos(n \arccos(x))$

Allgemeine Rekursionsformel: $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$,
 $T_{j+1}(x) = 2xT_j(x) - T_{j-1}(x)$, $j \in \mathbb{N}$

Legendre-Polynome: Das k -te Legendre-Polynom $Leg_k \in P_k$ ($k \in \mathbb{N}$) ist definiert durch: i) $Leg_k(1) = 1$ ii) $Leg_k \perp P_{k-1}$ bzgl. des Skalarprodukts $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$ auf $C[-1, 1]$.

$Leg_0(t) := 1$

Rekursionsformel: $(k+1) \cdot Leg_{k+1}(t) = (2k+1)t \cdot Leg_k(t) - k \cdot Leg_{k-1}(t)$

Legendre- und Tschebyscheff-Polynome sind Beispiele für orthogonale Systeme von Polynomen. Allgemein werden solche Systeme bzgl. eines Skalarprodukts definiert:

$\langle f, g \rangle_\omega = \int_a^b \omega(x)f(x)g(x)dx$ mit $\omega > 0$ „Gewichtsfunktion“

Bernoulli-Polynome: $B_0(t) := 1$ und $B_k = p_k \in P_k : \iff p'_k(t) = B_{j-1}(t)$ und $\int_0^1 p_j(t)dt = 0$ für $k \in \mathbb{N}$

Die ersten Polynome sind: $B_0(t) = 1$, $B_1(t) = t - \frac{1}{2}$,
 $B_2(t) = \frac{1}{2}(t - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{24}$.

Eigenschaften: i) $B_{2j}(0) = B_{2j}(1) \neq 0$ ($j \in \mathbb{N}_0$)
ii) $B_{2j+1}(0) = B_{2j+1}(1) = 0$ ($j \in \mathbb{N}$) iii) $B_1(1) = -B_1(0) = \frac{1}{2}$