Lineare Algebra I/II, Dr. Christian Nelius, Stichwörter und Zusammenhänge von Florian Schoppmann

Körper (§8.10 - 8.12)
- Schiefkörper
- kommutative Multiplikation
- Modulo-Restklasse genau dann ein Körper, wenn Anz. der Elemente eine Primzahl ist

Ringe (§8.6 - 8.9)
- abelsche Gruppe
- Halbgruppe mit neutr. Element
- Distributiv-Gesetz

Gruppen (§8.1 - 8.4)
- Abgeschlossenheit
- Assoziativität
- neutral. Element
- inverse Elemente
- Halbgruppe: Menge mit assoziativer Verknüpfung

Vektorraum (§9.1 - 9.11)
- 2 Verknüpfungen auf einer Menge über einem Körper
- Addition: abelsche Gruppe
- skalare Multiplikation: Abgeschlossenheit, Distributivgesetz, „Assozitivität“, neutrales Element
- Unterraum

LGS (§§7.14 - 7.15, 13.1 - 13.4)
- (in)homogen
- Lösungsraum des homogenen LGS entspricht Kern der Abbildung, die als Darstellungsmatrix die Koeffizientenmatrix besitzt
- inhomogen: Zusammensetzung der Lösung aus allgemeiner und spezieller
- Gauß'scher Lösungsalgorithmus

Basis (§10.1 - 10.13)
- Eine endl. erzeugbarer VR hat eine endliche Basis
- Jeder VR hat eine Basis
- maximal linear unabhängige Teilmenge
- Jede lin. unabh. Teilmenge lässt sich zu einer Basis ergänzen
- Eindeutige Darstellung von Vektoren als Linearkombination v. Basisvektoren
- minimales EZS

Erzeugendensystem (§9.12 - 9.14)
- (un)endlich erzeugbar
- Menge der Linearkombinationen einer Teilmenge ist Durchschnitt aller Unterräume, die die Teilmenge umfassen
- Vektorraum

Dimension (§10.14 - 10.23)
- Anz. der Elemente jeder Basis des VR's
- Dim. der Summe zweier VR's ist Summe der Dimensionen der VR'e abzügl. der Dim. des Schnitts
- Auch unendl.-dim. Vektorräume haben eine Basis

Endliche Mengen (Einschub B.15 - B.22)
- Mächtigkeit
- Abzählbarkeit
- Cantor'sches Diagonalverfahren

Permutationen (Einschub C)
- Inversion (Fehlstand)
- Vorzeichen einer Permutation
- Transposition
- gerade/ungerade Permutationen
- symmetrische Gruppe / alternierende Gruppe

Cramer'sche Regel (§15.16)
- Lösung eines LGS's

Entzerrungsalgorithmus (§13.6)
- LGS
- Treppenform
- Nullzeilen auffüllen

Gauß-Algorithmus (§7.8 - 7.12)
- Berechnung der inversen Matrix
- Treppenform
- Muliplikation mit Elementarmatrizen
- elementare Zeilenumformungen

Lineare Abhängigkeit (§9.15 - 9.19)
- In einer Menge von Vektoren lässt sich mind. einer als Lin.-Komb. der anderen darstellen
- Lineare Unabhängigkeit für unendl. erzeugbare Vektorräume: Jede endl. Teilmenge ist lin. unabhängig

Abbildungen (Einschub B.1 - B.14)
- identische, kostante Abbildung
- injektiv
- surjektiv
- bijektiv
- Assoziativgestz für die Hintereinanderausführung von Abbildungen
- Bild einer Abbildung
- Bildmenge einer Teilmenge des Definitionsbereichs
- Relation: linkstotal, rechtseindeutig
- Definitionsbereich, Wertemenge, Zuordnungsvorschrift

Determinantenform (§14.1 - 14.13)
- Abbildung
- Definition: Determinantenform ist n-linear und alternierend und nicht die Nullabbildung
- Definition: schiefsymmetrisch heißt, nur das Vorzeichen ändert sich bei Permutation der Argumente
- Schiefsymmetrisch folgt aus Alternierend (bei einer n-linearen Abb.)
- nicht Nullabbildung
- Argumente lin. unabh. genau dann wenn Det.-form $\neq 0$
- Eindeutigkeit, wenn Det.-form angewendet auf kan. Basis 1 ergeben soll

Determinante einer Matrix (§15.1 - 15.12)
- Entwicklung nach einer Spalte/Zeile (Laplace'sche Entwicklungssatz)
- Determinantenform
- Eindeutig, da 1 für kanonische Basis
- Determinantenproduktsatz
- $\det({}^tA)=\det(A)$, Gleichberechtigung von Spalten und Zeilen
- Leibniz'sche Determinantenformel -> Vorzeichen einer Permutation
- Matrix invertierbar wenn Det. $\neq 0$

Weitere Determinanteneigenschaften (§15.17 - 15.22)
- Rangbestimmung
- Vandermonde'sche Matrix und Determinante
- Determinante von Blockmatrizen

Basiswechsel (§16.9)
- Matrix zum Basiswechsel
- Darstellungsmatrizen bzgl. einer Basis
- Endomorphismus
- Normalform

Isomorphie (§11.10)
- Aquivalenzrelation
- bijektiv
- K-linear

Lineare Fortsetzung (§11.14 - 11.21)
- Bildwerte für Elemente einer Basis
- Vektorräume isomorph genau dann, wenn gleiche Dimesion

Lineare Abbildungen (§11.1, 11.9, 11.23)
- injektiv, wenn Kern Nullraum
- Rangsatz
- Definition: Rang gleich Dimension des Bildes
- Ein EZS des Def.-bereichs wird wieder auf ein EZS des Bildes abgebildet
- Bild (Unterraum der Wertemenge)
- Kern (Unterraum des Definitionsbereichs)

Rang (§12.12)
- Spaltenrang, Zeilenrang
- Gleichheit von Zeilenrang, Spaltenrang, Rang der Abbildung, Rang der Darstellungsmatrix
- Aquivalenz von Matrizen
- Bestimmung mit Gaußalgorithmus

Darstellungsmatrix (§12.1 - 12.9, 16.1 - 16.8)
- zwischen bel. endl.-dim. K-Vektorräumen: bzgl. geordneter Basen
- Koordinatenvektor bzgl. einer Basis
- gleicher Rang
- Eindeutigkeit der Darstellungsmatrix bzgl. gleicher Basen
- Darstellungsmatrix invertierbar genau dann, wenn Abb. bijektiv
- Hinterinanderausführung von Abb. -> Multiplikation der Darstellungsmatrizen

Matrizen (§6.1 - 6.15, §7.11)
- Format
- inverse Matrix, Berechnung mit Gauß-Algorithmus
- transponierte Matrix
- (anti-)symmetrische
- (obere/untere) Dreiecksmatrizen, Diagonalmatrizen
- Eine invertierbare quadratische Matrix ist das Produkt von Elementatrizen

Adjungierte Matrix (§15.13 - 15.15)
- Berechnung der inversen Matrix

Normalform (§16.11, 16.23)
- Einheitsmatrix als linker oberer Block einer Darstellungsmatrix
- Normalformenproblem
- Vollständiges Vertretersystem

Aquivalenzklassen (§16.19)
- Definiert auf einer Menge bzgl. einer Aquivalenzrelation
- Quotientenmenge
- vollsändiges Vertretersystem

Eigenwerte, Eigenvektoren (§17.1 - 17.11)
- Lineare Unabhängigigkeit
- Endomorphismus
- $\mathrm{Kern}(f - l \cdot id_V)$
- Determinante $\det(M - l \cdot E_n)=0$
- Eigenraum: Rangsatz

Aquivalenz von Matrizen (§16.13)
- $M=P \cdot N \cdot Q^{-1}$
- Aquivalenzrelation
- gleicher Rang

Ahnlichkeit von Matrizen (§16.24 - 16.26)
- $M=P \cdot N \cdot P^{-1}$
- Aquivalenzrelation
- Normalformenproblem

Aquivalenzrealtion (§16.14)
- Reflexivität
- Symmetrie
- Transitivität

positiv definitv (§20.1 / 21.1)
- euklidischer VR
- unitärer VR
- Skalarprodukt

unitärer VR
- Skalarprodukt

Euklidischer VR
- Skalarprodukt
- über Körper der reelen Zahlen

Der Anschauungsraum (§1.1 - §2.3)
- Vektoraddtition
- Skalare Multiplikation
- Vektorraum mit Skalaren aus R
- Geraden, Ebenen
- Parameterdarstellung
- Hesse'sche Normalform für eine Ebene

invariant (§19.6)
- Beispiel: Eigenraum

unzerlegbar (§19.7)
- invariant
- direkte Summe

Polynome (§17.17 - 17.20)
- Leitkoeffizient
- Grad
- Nullstelle, Vielfachheit

charakteristisches Polynom (§17.14 - 17.16)
- Ahnlichkeit von Matrizen
- Endomorphismus

Fundamentalsatz der Algebra (§17.21)
- Körper der komplexen Zahlen
- Zerfall in Linearfaktoren
- Polynom

Satz von Cayley-Hamilton (§19.13)
- Einsetzen einer Matrix in ihr eigenes charakteristisches Polynom

Minimalpolynom (§19.14)
- Satz von Cayley-Hamilton

Skalarprodukt (§4.1, 20.1, 21.1)
- linear
- symmetrisch
- positiv definit
- kanonisches (z.B. im Anschauungsraum)
- Norm
- Winkel
- Hermite'sche Form

Spatprodukt (§4.13 - 4.15)
- Skalarprodukt
- Vektorprodukt
- orientiertes Volumen
- Cramer'sche Regel
- Determinantenform im Anschauungsraum

Vektorprodukt (§4.10 - 4.12)
- Graßmann'scher Entwicklungssatz
- Identität von Lagrange
- Länge
- Winkel
- sin
- Parallelität
- Rechtssystem

diagonalisierbar (§18.1)
- Ahnlichkeit zu Diagonalmatrix
- Darstellungsmatrix
- charakteristisches Polynom zerfällt in Linearfaktoren
- Eigenwerte
- Hauptdiagonale
- Eigenräume, geometrische Vielfachheit
- algebraische Vielfachheit

trigonalisierbar (§19.1)
- Ahnlichkeit zu oberer Dreiecksmatrix
- Darstellungsmatrix
- charakteristisches Polynom zerfällt in Linearfaktoren
- Eigenwerte
- Hauptdiagonale

Hermite'sche Form (§21.1)
- Bsp.: kanonisches Skalarprodukt
- Abbildung mit 2 Argumenten (derselbe C-VR) in den Körper der komplexen Zahlen
- Linearität

orthogonal (§20.9)
- Skalarprodukt
- ${}^tM \cdot M=E_n$

Orthogonaler Endomporphismus (§20.9)
- längentreu
- orthogonale Matrix

Orthogonalsystem (§4.5)
- paarweise orthogonal
- linear unabhängig

Orthonormalsystem (§5.1, 20.5)
- Orthogonalsystem
- Orthonormalbasis
- Beispiel im Anschauungsraum
- Vektoren haben Länge („Norm“) 1

Norm (§20.3)
- Länge
- Winkel

Jordan-Block (§19.8)

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

Jordan-Normalform (§19.9)
- Jordan-Blöcke
- trigonalisierbar

symmetrischer Endomorphismus (§20.14)
- euklidischer VR
- Darstellungsmatrix bzgl. beliebiger Orthonormalbasis ist symmetrisch

Spektralsatz (§20.16)
- symmetrischer Endom.
- Orthonormalbasis
- Darstellungsmatrix
- Diagonalmatrix
- Symm. Matrizen über **R** vom Format n x n besitzen n relle Eigenwerte und sind diagonalisierbar