Zusammenfassung Lineare Algebra

§0 Grundlagen und Bezeichnungen

1) Eigenschaften von $+$ und $\cdot$ auf $\mathbf{R}$, $(\mathbf{R}, + \cdot)$ ist ein Körper
4) Axiome für $\leq$ Reflexivität, Antisymmetrie, Transitivität, Linearität $\Longrightarrow \mathbf{R}, (\mathbf{R}, + \cdot)$ ist ein **angeordneter Körper**
14) **allgemeinrichtig**: Formel hat immer Wahrheitswert wahr
24) **Komplementmenge**: $C_M(U) := M \setminus U$ (für $U \subseteq M$)

§1 Vektoren im Anschauungsraum

1) Vektoraddition
2) Skalarmultiplikation, Vektor der Länge 1 heißt **normiert**
3) Der **Vektorraumbegriff**, reeller Vektorraum mit Skalaren aus $\mathbf{R}$

§2 Geraden & Ebenen

1) **Parameterdarstellung** einer Geraden
2) Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ parallel $(\vec{a} \| \vec{b}) \Longrightarrow \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}, \vec{a} = r \cdot \vec{b}, r \in \mathbf{R}$
3) Parameterdarstellung einer Ebenen

§3 Lineare (Un-)Abhängigkeit

3) **Dimensionsaxiom**
4) 3 lin. unabhängige Vektoren $b_1, b_2, b_3 \longrightarrow$ eindeutig bestimmte Koeffizienten. Jeder Vektor $\vec{v}$ lässt sich darstellen als $\vec{v} = a_1\vec{b_1} + a_2\vec{b_2} + a_3\vec{b_3}$ mit geeig. $a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{R}$

§4 Produktbildungen

1) Inneres Produkt (**Skalarprodukt**) $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle := \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos\varphi$
3) 2 Vektoren orhtogonal $\Leftrightarrow$ Skalarprodukt $= 0$
4) $v_1, \dots, v_n \neq 0 \wedge \langle \vec{v_i}, \vec{v_k} \rangle = 0 \quad \forall i, k = 1, \dots, n, \quad i \neq k$
5) Ein **Orthogonalsystem** ist linear unabhängig
8) **Hesse'sche Normalform** einer Ebene
9) Abstand Punkt $\leftrightarrow$ Ebene
10) Äußeres Produkt (**Vektorprodukt**) $\|\vec{v} \times \vec{w}\| = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \sin\varphi$
11) Eigenschaften: Antisymmetrie, Bilinearitöt, Distributivität
12) 2 Vektoren parallel $\Leftrightarrow$ Vektorprodukt $= 0$ (beide Vektoren $\neq 0$)
13) **Spatprodukt**: $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle$
14) 3 Vektoren linear abhängig $\Leftrightarrow$ Spatprodukt $= 0$
15) Cramer'sche Regel
16) Graßmann'scher Entwicklungssatz

§5 Koordinatendarstellung von Vektoren

1) **Orthonormalsystem**
2) Koordinatendarstellung eines Vektors bzgl. eines Koordinatensystems
3) Berechnung der Produkte auf §4 im Anschauungsraum mit Koordinaten

§6 Matrizen

1) Def.: (m, n) ist **Format** einer $(m \times n)$-Matrix
4) Eigenschaften der Addition und skalaren Multiplikation
5) Produkt aus Matrix und Spaltenvektor
8) Assoziativität der Matrizen-Multiplikation, im Allg. keine Kommutativität für $n \geq 2$, Distributivität, Einheitsmatrix
10) **Inverse Matrix** (Berechnung), Einheitsmatrix
12) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}, \ (A^{-1})^{-1} = A$
13) **transponierte Matrix**, symmetrische: ^{t}A = A, antisymmetrische: ^{t}A = -A
14) Eigenschaften von transp. Matrizen (Rechenregeln)
15) **Dreiecksmatrizen**

§7 lineare Gleichungssysteme

1) Basismatrizen $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \vdots & & & \\ & & & 0 & & & \\ \vdots & & \vdots & 1 & \vdots & & \vdots \\ & & & 0 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$
2) $A = (a_{ik}) \in M_{m,n}(K)$, $A = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} E_{ik}$
3) **Elementarmatrizen**: Vertauschungsmatrix, Additionsmatrix, Multiplikationsmatrix
4) Multiplikation einer Elementarmatrix von links $\rightarrow$ el. Zeilenumformung
5) Elementare Zeilenmatrizen sind invertierbar

6) LGS $Ax = b$ **inhomogen**, wenn $b \neq 0$, sonst **homogen**, (erweiterte) Koeffizientenmatrix
7) $\text{Lös}(A, b) = \text{Lös}(BA, Bb), b \in GL_m(\mathbf{R})$
   Einschub: Rechtfertigung des Induktionsbeweises auf Grundlage der Peano-Axiome
10) **Rang** einer Matrix
11) A sei quadr. Matrix: A invertierbar $\Leftrightarrow \text{rg}(A) = n \Leftrightarrow \text{T}(A) = E_n \Leftrightarrow A$ ist Produkt von Elementarmatrizen
12) Berechnung der inversen Matrix (vgl. §6.10)
14) $\text{Lös}(A, b) = v_0 + \text{Lös}(A, 0_m)$ (Lösung des inhomogenen LGS setzt sich zusammen aus spezieller und „allgemeiner" Lösung des zugehörigen homogenen LGS)
15) Abgeschlossenheit der Lösungsmenge → Vektorraum

§8 Gruppen, Ringe & Körper

1) **Gruppen** (Abgeschlossenheit, Assoziativität, neutr. El., inverse El., (wenn abelsch: Kommutativität)
   Halbgruppe: Menge mit assoziativer Verknüpfung (z.B. $(\mathbf{N}, +)$)
3) **Modulo-Restklassen**
4 Untergruppe
6) **Ringe**: R ist Ring $\Leftrightarrow$ $(R, +)$ ist abelsche Gruppe, $(R, \cdot)$ Halbgruppe mit neutr. El., Distributiv-Gesetz
7) Rechenregeln
9) Unterring: U ist Unterring $\Leftrightarrow$ U Untergruppe von $(R, +)$, U abgeschlossen bzgl. $\cdot$ und $1_R \in U$
10) **Schiefkörper**: Ring, bei dem $1 \neq 0$ und jedes Element $\neq 0$ invert. Wenn Mult. kommuativ: **Körper**
11) Beispiele!
12) Unterkörper: Unterring, das Inverse jedes El. $\neq 0$ ist wieder im Unterkörper

§9 Vektorräume

1) formale Definition
2) Beispiele: Lösungsmengen hom. LGS'e, $\mathbf{R}$ über sich selbst
3) Nullteilerfreiheit
4) **Unterraum**: Abgeschlossenheit bzgl. Addition & skalarer Multiplikation, Nullelement enthalten
6) Schnitt, Addition zweier Unterräume wieder Unterraum, Vereinigung i.A. nicht
7) $\hookrightarrow$ Erweiterung auf bel. # von Unterräumen
8) Linearkombination, sei $E = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $\mathcal{L}_K(E) = \sum_{i=1}^n K v_i$
9) Die Menge aller Linearkombinationen einer bel. Teilmenge eines Vektorraumes ist ein Unterraum
10) $\mathcal{L}_{\mathbf{C}}(1) = \{z \cdot 1 | z \in \mathbf{C}\} = \mathbf{C}$
11) $\mathcal{L}_K(E)$ ist der kleinste Unterraum von V, der E umfasst
    $\mathcal{L}_K(E)$ ist der Durchschnitt aller Unterräume von V, die E umfassen
12) **Erzeugendensystem** E: $\mathcal{L}_K(E) = V$. Falls V ein ednl. EZW besitzt, ist V endlich erzeugbar.
13) Beispiel: $\mathbf{R}$ ist als $\mathbf{Q}$-Vektorraum nicht endl. erzeugbar
14) $v_i \in \mathcal{L}_K(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n) \Leftrightarrow$
    $\mathcal{L}_K(v_1, \ldots, v_n) =$
    $\mathcal{L}_K(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n)$
15) Neue Definition für linear abhängig: mind. ein Vektor lässt sich als Linearkombination der anderen darstellen
17) Beispiele: $\{1, i\}$ ist lin. abh. über $\mathbf{C}$, unabh. über $\mathbf{R}$

§10 Die Dimension eines Vektorraumes

1) lin. unabh. **Basis** $\Leftrightarrow$ eindeutige Darstellung jedes Vektors darüber
2) Basis $\widehat{=}$ lin. unabh. EZS
5) $T = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ lin. unabh. $\Rightarrow$ $(\forall v \in V : T \cup \{v\}$ lin. unabh. $\Leftrightarrow v \notin \mathcal{L}_K(T))$
6) Basis von V $\widehat{=}$ min. EZS von V $\widehat{=}$ max. lin. unabh. Teilmenge von V
7-8) Endl. erzeugbare VR'e haben endl. Basen
10) Austauschlemma
11) **Austauschsatz** von Steinitz
13) Alle Basen haben gleich viele Elemente
14) Dimension eines VR's, Zeichen für unendlich-Dimensionalität: $\dim(V) = \infty$
15) Auch unendl.-dim. VR'e besitzen (undendl.) Basen → Zorn'sches Lemma

---

2. Semester

---

16) V sei $K-$VR mit $\dim_K(V) = n$
    Jede lin. unabh. Teilmenge hat $\leq n$ Elemente, jede lin. unabh. Menge $T \subseteq V$ mit genau n El. ist **Basis**, jedes EZS E hat mind. n Elemente, jedes EZS E mit genau n El. ist eine Basis

17) V endl. erzeugbar $\Rightarrow$ Jede lin. unabh. Teilmenge T eines VR V lässt sich durch Hinzunahme geeigneter Vekotren zu einer Basis ergänzen.
18) Folgerung: $U \subseteq V$ Unterraum, V endl. erzeugbarer VR $\Rightarrow \dim(U) \leq \dim(V)$, jede Basis von U lässt sich zu einer Basis von V ergänzen
19) Sei V endl.-dim. VR $\Rightarrow \forall\, U \subseteq V$ Unterraum: $\exists\, U' \subseteq V$ Unterraum: $U + U' = 0 \wedge U \cap U' = 0$
20) **Direkte Summe** zweier Unterräume, direkter Summand, direktes Komplement
21) V sei K-VR, $U_1, U_2 \subseteq V$ Unterräume $\Rightarrow$ ($V = U_1 \oplus U_2 \Leftrightarrow$ Jeder Vektor $v \in V$ lässt sich darstellen als $v = u_1 + u_2$ mit $u_i \in U_i \quad (i = 1, 2)$)
22) Direkte Summe mehrerer Vektorräume
23) V sei endl.-dim. K-VR, U_1 und U_2 Unterräume $\Rightarrow \dim_K(U_1 + U_2) = \dim_K(U_1) + \dim_K(U_2) - \dim_K(U_1 \cap U_2)$

Einschub: Abbildungen und Mengen

1) M und N seien Mengen: Eine **Abbildung** ordnet jedem Element aus M genau ein Element aus N zu.
2) Weitere Definitionen: Definitionsbereich, Wertemenge, Zuordnungsvorschrift, Graph einer Abbildung (eine Relation zwischen M und N), linkstotal, rechtseindeutig
   Eine **partielle Abbildung** ist nur rechtseindeutig
3) Gleichheit zweier Abbildungen ist definiert durch Gleichheit von Wertemenge, Bildbereich und Bildwert jeder einzelnen Stelle der Wertemenge
4) $f|U : U \longrightarrow N, \ (f|U)(x) = f(x) \ \forall x \in U$
5) Bildmenge einer Teilmenge des Wertebereichs, Bildmenge des Wertebereichs =: Bild der Abbildung f, Urbildmenge einer Teilmenge der Wertemenge
6) $g \circ f$ heißt die Hintereinanderausführung von f und g
7) $\hookrightarrow$ es gilt das Assoziativgesetz
8) **injektiv**, **surjektiv**, **bijektiv**
11) f und g beide injektiv (surjektiv bzw. bijektiv) $\Rightarrow g \circ f$ injektiv (surjektiv bzw. bijektiv)
   $g \circ f$ injektiv (surjektiv) $\Rightarrow f$ injektiv (g surjektiv)
   $g \circ f$ bijektiv $\Rightarrow f$ injektiv und g surjektiv
12) f bijektiv $\Leftrightarrow \exists!\ g : N \longrightarrow M$ mit $g \circ f = id_M$ und $f \circ g = id_N$
13) $\hookrightarrow g = f^{-1}$ **Umkehrabbildung** (inverse Abbildung)
15) M und N seien nichtleere Mengen: M gleichmächtig zu N ($M \sim N$), wenn es eine bijektive Abb. $M \longrightarrow N$ gibt, endliche Mengen, die leere Menge ist endlich $|\emptyset| = 0$, unendliche Mengen ($|M| = \infty$)
16) $\mathbf{N}$ ist eine unendliche Menge, jedoch abzählbar unendlich ($|\mathbf{N}| = |\mathbf{N_0}| = |\mathbf{Z}| = |\mathbf{Q}| = \aleph_0$), $\mathbf{R}$ ist überabzählbar ($|\mathbf{R}| = \aleph_1$)
19) M und N seien nichtleere endliche Mengen mit $|M| = |N|$. Für $f : M \longrightarrow N$ gilt: f bijektiv $\Leftrightarrow f$ injektiv $\Leftrightarrow f$ surjektiv
20) $\hookrightarrow$ für unedliche Mengen gilt dies i.A. nicht
21) Jede nichtleere endliche Menge natürlicher Zahlen besitzt ein kleinstes und ein größtes Element
20) **Wohlordnung** der geordneten Menge $(\mathbf{N}, \leq)$: Jede nichtleere Teilmenge von $\mathbf{N}$ besitzt ein kleinstes Element

§11 Lineare Abbildungen

1) V und W seien K-VR'e. Eine Abb. $f : V \longrightarrow W$ heißt K**-linear**, wenn gilt: L_1) $f(v + v') = f(v) + f(v') \ \forall\, v, v' \in V$ und L_2) $f(av) = a \cdot f(v) \ \forall\, a \in K, v \in V$
   $\mathbf{Hom}_K(V, W) \mathrel{\widehat{=}}$ Menge aller K-lin. Abb. von V in W
3) Eigenschaften (Rechenregeln)
4) V und W seien K-VR'e
   $\Rightarrow \mathrm{Hom}_K(V, W) \subseteq \mathrm{Abb}(V, W)$ K-Unterraum
5) f und g K-lin. $\Rightarrow g \circ f K$-linear (sofern Definitionsbereich von g und Wertemenge von f gleich)
6) $\underline{f : V \longrightarrow W, f K\text{-linear im Folgenden}}$
   $\Rightarrow \mathrm{Kern}(f) := \{v | v \in V,\ f(v) = 0_W\} \subseteq W$
7) $U \subseteq V$ Unterraum $\Rightarrow f(U) \subseteq W$ Unterraum
   $X \subseteq W$ Unterraum $\Rightarrow f^{-1}(X) \subseteq V$ Unterraum
8) $\mathbf{Bild}(f) = f(V)$ ist Unterraum von W, $\mathbf{Kern}(f) = f^{-1}(\{0_W\})$ ist Unterraum von V
9) f injektiv $\Leftrightarrow \mathrm{Kern}(f) = 0$
   f surjektiv $\Leftrightarrow \mathrm{Bild}(f) = W$
10) Eine bijektive K-lin. Abb. $f : V \longrightarrow W$ ist K**-Isomorphismus** von V auf W
   V heißt K-isomorph zu W ($V \cong W$), wenn $\exists\, K$-Isomorphismus von V nach W

11) $\mathrm{id}_V : V \longrightarrow V$ ist K-Isomorphismus
$f : V \longrightarrow W K$-Isomporphismus
$\Rightarrow f^{-1} : W \longrightarrow V K$-Isomorphismus,
$f : V \longrightarrow W$ und
$g : W \longrightarrow X K$-Isomorphismen
$\Rightarrow g \circ f : V \longrightarrow X K$-Isomorphismus
12) (vgl. §16.16) $V \cong V$, $V \cong W \Rightarrow W \cong V$, $V \cong W \wedge W \cong X \Rightarrow V \cong X$
13) Für eine K-lin. Abbildung gilt:
Die Bildmenge einer lin. unabh. Menge ist wieder lin. unabh.
Ein EZS wird auf ein EZS des Bildes der Abb. abgebildet
Ein EZS wird auf ein EZS der Wertemenge abgebildet, wenn die Abb. surjektiv ist.
Ist das Bild der Abb. ein EZS der Wertemenge, so ist die Abb. surjektiv.
14) $f, g : V \longrightarrow W$ $K-$lin. Abbildungen. Ist die Bildmenge eines beliebigen EZS's unter f und g gleich, so folgt $f = g$ ($f|E = g|E \Rightarrow f = g, E$ bel. EZS von V).
15) **Lineare Fortsetzung** Um eine lin. Abb. zu definieren, braucht man die Zuordnungsvorschrift nur für die Elemente einer (endl.) Basis von V anzugeben. Die Abb. ist dann auf ganz V definiert.
16) V, W endl.-dim. VR'e: $V \cong W \Leftrightarrow \dim_K(V) = \dim_K(W)$
18) $\mathrm{rg}_K(f) := \dim(\mathrm{Bild}(f))$
21) $f : V \longrightarrow W$, $g : W \longrightarrow X$, $h : X \longrightarrow Y$ K-lineare Abbildungen. Es gilt: f surjektiv $\Rightarrow \mathrm{rg}_K(g \circ f) = \mathrm{rg}_K(g)$, h injektiv $\Rightarrow \mathrm{rg}_K(h \circ g) = \mathrm{rg}_K(g)$, f surjektiv und h injektiv $\Rightarrow \mathrm{rg}_K(h \circ g \circ f) = \mathrm{rg}_K(g)$
22) V endl.-dim. $\Rightarrow \exists U \subseteq V$ Unterraum mit $V = \mathrm{Kern}(f) \oplus U$ und $U \cong \mathrm{Bild}(f)$
23) V endl.-dim. $\Rightarrow \mathrm{rg}_K(f) < \infty$ und $\dim_K(V) = \dim_K(\mathrm{Kern}(f)) + \mathrm{rg}_K(f)$
24) $\dim_K(V) = \dim_K(W)$ und V und W endl.-dim. $\Rightarrow$ (f injektiv $\Leftrightarrow$ f surjektiv $\Leftrightarrow$ f bijektiv)

§12 Darstellungsmatrix einer K-lin. Abbildung $K^n \longrightarrow K^m$

1) Es gelte im Folgenden: $f : K^n \longrightarrow K^m$, **Darstellungsmatrix** von f bezeichnet mit $\mathrm{M}(f)$
3) Zu jeder Matrix $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ gibt es eine entspr. K-lin. Abb.
5) $\varphi(f) : \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m) \longrightarrow \mathrm{M}_{m,n}(K)$, $\varphi(f) := \mathrm{M}(f)\ \forall f \in \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$ ist ein K-Isomorphismus
6) $\mathrm{M}(g \circ f) = \mathrm{M}(g) \cdot \mathrm{M}(f)$ (sofern hintereinander ausführbar)
7) $\hookrightarrow$ Beweis der Assoziativität der Matrizenmultiplikation möglich (vgl. §6.8)
8) f injektiv $\Rightarrow$ Spalten von $\mathrm{M}(f)$ lin. anabh.
f surjektiv $\Rightarrow$ Spalten von $\mathrm{M}(f)$ bilden ein EZS von K^m
f bijektiv $\Rightarrow$ Spalten von $\mathrm{M}(f)$ bilden eine Basis von K^m
9 f ist K-Isomprohismus $\Leftrightarrow \mathrm{M}(f)$ invertierbar. Es gilt dann $\mathrm{M}(f)^{-1} = \mathrm{M}(f^{-1})$
10) A invert. $\Leftrightarrow$ Spaltenvektoren von A bilden eine Basis von K^n $\Leftrightarrow$ Spaltenvektoren von A sind lin. unabh.
11) A invert. $\Leftrightarrow$ $\exists\, C \in \mathrm{M}_n(K) :\ C \cdot A = E_n$ $\Leftrightarrow$ $\exists\, D \in \mathrm{M}_n(K) :\ A \cdot D = E_n$
Spaltenraum, **Zeilenraum**
12) **Spaltenrang**, **Zeilenrang**
14-19) Spaltenrang = Zeilenrang = Rang der Abbildung = Rang der Darstellungsmatrix
21) $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$ $\Leftrightarrow$ $\exists\, P \in \mathrm{GL}_m(K)$ und $Q \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $B = P \cdot A \cdot Q$

§13 Lineare Gleichungssysteme (II)

2) Sei $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$:
$\underbrace{\dim_K(\text{Lös}(A, 0_m))}_{\text{Anz. der frei wählbaren Parameter}} = \underbrace{n}_{\text{Anz. der Unbekannten}} - \mathrm{rg}(A)$
3) Lösungsraum eines homogenen LGS
6) **Entzerrungsalgorithmus**

§14 Determinantenformen

1) V ist K-VR, $n \in \mathbf{N}$ und $f : V^n \longrightarrow K$ eine Abb.
Eigenschaften: **n-linear**, **alternierend**, **schiefsymmetrisch**
2) Die Menge der n-lin. (bzw. alternierenden bzw. schiefsymm.) Abb. von V^n nach K ist ein Unterraum des K-VR's $\mathrm{Abb}(V^n, K)$.
3) Für eine alternierende n-lin. Abb. $f : V^n \longrightarrow K$ gilt: Die Addition eines Vielfachen eines Funktionsarguments zu einem anderen ändert nichts am Funktionswert; f ist schiefsymmetrisch; sind die Funktionsargumente lin. abh., so ist der Funktionswert von $f = 0$; $\dim_K < n \Rightarrow f = 0$
4) S_n ist die Menge aller **Permutationen** der Zahlen $1, 2, \ldots, n$

5) Sei $n \in \mathbf{N}$: $(S_n, \circ)$ ist **symmetrische Gruppe** von n Elementen; $(S_n, \circ)$ abelsch $\Leftrightarrow$ $n \leq 2$; $|S_n| = n!$
8) V ist K-VR der Dim. n. Eine Abbildung $d : V^n \longrightarrow K$ heißt **Determinantenform** auf V, wenn gilt: d ist n-linear und alternierend, $d \neq 0$ (Nullabbildung)
9) $d(v_1, \dots, v_n) \neq 0 \Leftrightarrow \{v_1, \dots, v_n\}$ lin. unabh. $\Leftrightarrow$ $\{v_1, \dots, v_n\}$ ist eine Basis von V
10-13) Eindeutigkeit von Determinantenformen: $\exists! \, (d : V^n \longrightarrow K) : d(v_1, \dots, v_n) = 1_K$

§15 Die Determinante einer Matrix

1) Sei $A = (a_{ik}) \in \mathrm{M}_n(K)$.
$\det(A) :=$
$$\begin{cases} a_{11} & (n = 1) \\ \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} a_{1k} \cdot \det(A'_{1k}) & (n > 1) \end{cases}$$
2) $\det(A)$ ist eine Determinantenform auf K^n
4) $A \in \mathrm{M}_n(K) \Rightarrow (A$ invertierbar $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0_K)$
5) **Laplace'scher Entwicklungssatz** (Entwicklung nach der i-ten Zeile)
$\det(A) := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \cdot \det(A'_{ik})$
6) $A, B \in \mathrm{M}_n(K) \Rightarrow \det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
7) $A \in \mathrm{GL}_n(K) \Rightarrow \det(A^{-1}) = det(A)^{-1}$
9) $A \in \mathrm{M}_n(K) \Rightarrow \det({}^tA) = \det(A)$
11) Laplace'scher Entwicklungssatz (Entwicklung nach der i-ten Spalte)
$\det(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \cdot \det(A'_{ik})$
12) **Leibniz'sche Determinantenformel**
$\det(A) := \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{sign}(\pi) \cdot a_{\pi(1),1} \cdot \ldots \cdot a_{\pi(n),n}$, mit $\mathrm{sign}(\pi) := (-1)^{\nu(\pi)}$
13) $A = (a_{ik}) \in \mathrm{M}_n(K) \quad (n \geq 2)$. Die Matrix $A^{ad} := (\alpha_{ik}) \in \mathrm{M}_n(K)$ mit $\alpha_{ik} := (-1)^{i+k} \det(A'_{ki})$ heißt die zu A adjungierte Matrix.
14) $A \cdot A^{ad} = A^{ad} \cdot A = \det(A) \cdot E_n$
16) **Cramer'sche Regel**: Sei $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit den Spalten $s_1, \dots, s_n$ und $b \in K^n$. Dann ist die eindeutig bestimmte Lösung ${}^t(a_1, \dots, a_n) \in K^n$ des LGS's $Ax = b$ gegeben durch: $a_i = (det(A))^{-1} \cdot \det(s_1, \dots, s_{i-1}, b, s_{i+1}, \dots, s_n)$ $(i = 1, \dots, n)$
17) Eine Matrix $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ hat genau denn den Rang $r \geq 1$, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind: A besitzt eine r-reihige Unterdeterminante $\neq 0_K$ und jede $(r+1)$-reihige Unterdeterminante von A ist gleich 0_K
18-20) **Vandermonde'sche Determinante**
21-22) **Blockmatrizen**:
$$\det \begin{pmatrix} A_1 & & & * \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_t \end{pmatrix} = \prod_{j=1}^{t} \det(A_j)$$

Einschub: Das Vorzeichen einer Permutation

1-4) **Inversion**, Vorzeichen $\mathrm{sign}(\pi)$
5) $\pi, \rho \in S_n$: $\mathrm{sign}(\pi \circ \rho) = \mathrm{sign}(\pi) \cdot \mathrm{sign}(\rho)$
6-7) **Transposition**
8) A_n bezeichnet die Menge aller geraden Permutationen (d.h. $\nu(\pi)$ ist gerade)
9-10) A_n ist Untergruppe von S_n, $(A_n, \circ)$ heißt alternierende Gruppe von n Elementen

§16 Das Normalformenproblem

1) $\kappa_B(v) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K^n$ heißt der Koordinatenvektor von v bzgl. der Basis B
2) **Darstellungsmatrix** bzgl. zweier Basen
3) $B = \{v_1 \dots v_n\}$ geordnete Basis
$\mathrm{M}_C^B(f) = (\kappa_C(f(v_1)) \dots \kappa_C(f(v_n)))$
4) Rang der Darstellungsmatrix = Rang der Abbildung
5) Die Abb. $\phi_C^B : \mathrm{Hom}_K(V, W)$, die jeder Abb. ihre Darstellungsmatrix bzgl. B und C zuordnet, ist ein K-Isomorphismus.
6) $\dim_K(\mathrm{Hom}_K(V, W)) = \dim_K(V) \cdot \dim_K(W)$
7) $\mathrm{M}_D^B(g \circ f) = \mathrm{M}_D^C(g) \cdot \mathrm{M}_C^B(f)$
8) $\mathrm{M}_C^B(f) \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $\mathrm{M}_C^B(f)^{-1} = \mathrm{M}_B^C(f^{-1}) \Leftrightarrow$ fK-Isomporphismus
9) $\mathrm{M}_{B'}^B(\mathrm{id}_V)$ ist die Matrix zum **Basiswechsel** von B nach B'. $\mathrm{M}_{B'}^B(\mathrm{id}_V)^{-1} = \mathrm{M}_B^{B'}(\mathrm{id}_V)$
10) $f : V \longrightarrow W$, $\mathrm{M}_{C'}^{B'}(f) = P \cdot \mathrm{M}_C^B(f) \cdot Q^{-1}$. Es gibt solche $P \in \mathrm{GL}_n(K), Q \in \mathrm{GL}_n(K)$, wobei $|B| = |B'| = n \ \wedge \ |C| = |C'| = m$
11) $f : V \longrightarrow V$ K-Endomorphismus. $\mathrm{M}_{B'}^{B'}(f) = P \cdot \mathrm{M}_B^B(f) \cdot P^{-1}$. Es gibt solch ein $P \in \mathrm{GL}_n(K)$.
12) Es gibt Basen bzgl. derer die Darstellungsmatrix einer K-lin. Abb. vom Rang r die Form $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ hat.
13) **Äquivalenz**: $M \sim N \Leftrightarrow$ M und N sind beide Darst.-matr. einer (derselben) Abb. bezgl. unterschiedlicher Basen
16) **Äquivalenzrelation**: Reflexivität, Symmetrie, Transitivität

17) Ordnungsrelation: Reflexivität, Antisymmetrie, Transitivität
19) **Äquivalenzklasse**
22) $M/R := \{[x]_R | x \in M\}$ heißt Quotientenmenge von M nach R; $S \subseteq M$ vollst. Vertretersystem von M/R, wenn S aus jeder Äquivalenzklasse von M/R genau ein Element enthält.
24) $M \approx N \Leftrightarrow \exists P \in \mathrm{GL}_n(K) : M = P \cdot N \cdot P^{-1}$
25) $M \approx N \Leftrightarrow M \sim N$

§17 Eigenwerte und Eigenvektoren

6) **Eigenraum** zum **Eigenwert** λ: $\mathrm{Eig}(f, \lambda) := \mathrm{Kern}(f - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)$
8-9) Eine Menge von **Eigenvektoren** zu paarweise verschiedenen Eigenwerten ist lin. unabh.
11) Entsprechung Eigenvektor einer $\mathrm{M}_n(K)$-Matrix $\leftrightarrow$ eines K-Endomorphismus
12) λ Eigenwert von $M \Leftrightarrow \det(M - \lambda \cdot E_n) = 0$ $\dim_K(\mathrm{Eig}(M, \lambda)) = n - \mathrm{rg}(M - \lambda \cdot E_n)$
13) Sei $M_n \in \mathrm{M}_n(K)$. Dann ist $\det(M - \lambda \cdot E_n) = \sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^i$, also ein **Polynom** n-ten Grades.
14) $\hookrightarrow$ **Charakteristisches Polynom** einer Matrix
15) Ähnliche Matrizen haben das gleiche char. Polynom und daher auch dieselben Eigenwerte
16) Entsprechung charakteristisches Polynom einer Matrix $\leftrightarrow$ eines Endomorphismus
17-18) „Abspalten“ von **Nullstellen**
19) $\mu(p, \alpha) \leq \mathrm{grad}(p)$ bezeichnet die Vielfachheit der Nullstelle α im Polynom p.
21) **Fundamentalsatz der Algebra**: Ein beliebiges Polynom p über $\mathbf{C}$ vom Grad ≥ 0 hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbf{C}$. D.h. p zerfällt in Linearfaktoren.

§18 Diagonalisierbare Endomorphismen und Matrizen

1) **diagonalisierbar**: Matrix: ähnlich zu Diagonalmatrix, Endomorphismus: Darstellungsmatrix zu einer geeigneten Basis ist Diagonalmatrix
4) f sei K-End. in V. Es gilt: f diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ Es ex. eine Eigenbasis von V $\Leftrightarrow$ Sind $v_1, \ldots, v_s \in K$ alle (paarw. verschiedenene) Eigenwerte von f, so gilt: $V = \bigoplus_{i=1}^{s} \mathrm{Eig}(f, \lambda - i)$
5) $\dim_K(V) = n$. Es gilt für einen Eigenwert λ: $1 \leq \underbrace{\dim_K(\mathrm{Eig}(f, \lambda))}_{\text{geometrische Vielfachheit}} \leq \underbrace{\mu(p_f, \lambda)}_{\text{algebraische Vielfachheit}} \leq n$
6) f diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ Das char. Polynom p_f zerfällt in $K[T]$ in Linearfaktoren, und für jeden Eigenwert gilt: $\dim_K(\mathrm{Eig}(f, \lambda)) = \mu(p_f, \lambda)$

§19 Trigonalisierbare Endomorphismen und Matrizen

1) **trigonalisierbar**: Matrix: ähnlich zu oberer Dreiecksmatrix, Endomorphismus: Darstellungsmatrix zu einer geeigneten Basis ist obere Dreieckecksmatrix
3) $M \in \mathrm{M}_n(K)$, es gilt: M trigonalisierbar $\Leftrightarrow$ das char. Polynom p_M von M zerfällt in $K[T]$ in Linearfaktoren
4) Jeder $\mathbf{C}$-Endomorphismus über einem endl.-dim. $\mathbf{C}$-VR ist trigonalisierbar.
6) Ein Unterraum U eines Vektorraums heißt **f-invariant**, falls im End. f gilt: $f(U) \subseteq U$
7) V **unzerlegbar** bzgl. $f \Leftrightarrow V \neq 0$ und V ist nicht direkte Summe zweier f-invarianter Unterräume $\neq 0$ von V.
8) f besitze einen Eigenwert $\lambda \in K$. V unzerlegbar bzgl. $f \Rightarrow$ Es ex. eine Basis B von V mit $$\mathrm{M}_B^B(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda \end{pmatrix} = J_n(\lambda) \in \mathrm{M}_n(K)$$ $J_n(\lambda)$ heißt **Jordan-Matrix** zum Eigenwert λ von f.
9) **Jordan'sche Normalform**, B geeignete Basis $$\mathrm{M}_B^B(f) = \begin{pmatrix} J_{n1}(\lambda_1) & & & 0 \\ & J_{n2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{ns}(\lambda_s) \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(K)$$ Diese Matrix heißt Jordan'sche Normalform (JNF) von f.
13) **Satz von Cayley-Hamilton** (für Matrizen): Einsetzen einer Matrix als Unbekannte (für T) in ihr char. Polynom ergibt 0 (die Nullmatrix).
14) Zu einer Matrix $M \in \mathrm{M}_n(K)$ ex. ein eindeutig bestimmtes normiertes Polynom kleinsten

Grades q_M mit $q_M(M) = 0$. Dieses Polynom heißt **Minimalpolynom** von M.

§20 Euklidische Vektorräume

1) V sei bel. VR über $\mathbf{R}$. Eine Abb. $s : V \times V \longrightarrow \mathbf{R}$ heißt **Skalarprodukt** auf V, wenn gilt: s bilinear, s symmetrisch, s positiv definit (d.h. $s(v,v) > 0\, \forall v \in V$ $\{0_V\}$).
(V, s) heißt dann **euklidischer R-VR**.
3) **Norm**: $\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$
Eigenschaften: $\forall v \in V : \|v\| \geq 0 \wedge \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0_V$, $\forall a \in \mathbf{R}\, \forall v \in V : \|av\| = |a| \cdot \|v\|$, $\forall v, w \in V : \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (Dreiecksungleichung)
4) **Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung**
$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|\, \forall v, w \in V$
Es lässt sich ein Winkel zwischen v und w definieren: $\cos(\phi) = \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|}$
5) Definition **Orthonormalsystem** wie in §5.1
8) Zu einem n-dim. euklidischen VR $(V, \langle,\rangle_V)$ gibt es einen $\mathbf{R}$-Isomoprphismus $f : V \longrightarrow \mathbf{R}^n$ mit der Eigenschaft:
$\langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle_V\, \forall v, w \in V$
9) Ein $\mathbf{R}$-Endomorphismus f auf V heißt **orthogornal**, wenn $\langle f(v), f(w)\rangle \quad =\rangle \quad = \langle v, w\rangle\, \forall v, w \in V$;
Eine Matrix $M \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ heißt orthogornal, wenn ${}^tM \cdot M = E_n$ gilt.
10) Eine Abbildung ist genau dann **orthogonal**, wenn sie **längentreu** ist;
Eine Matrix ist genau dann orthogonal, wenn ihre Spalten bzw. Zeilen ein Orthonormalsystem in $\mathbf{R}^n$ bilden.
11) B sei beliebige Orthonormalbasis: f orthogonal $\Leftrightarrow \mathrm{M}_B^B(f)$ ist orthogonale Matrix
13) Ein orthonogonaler Endomorphismus setzt sich ausschließlich aus Spiegelungen, Drehungen oder Beibehaltung von Basisvektoren zusammen.
14) Ein **Endomorphismus** f auf V heißt **symmetrisch**, wenn gilt: $\langle f(v), w\rangle = \langle v, f(w)\rangle\, \forall v, w \in V$
15) Ist $(V, \langle,\rangle)$ ein n-dim. euklidischer VR, so ist $f \in \mathrm{End}_{\mathbf{R}}(V)$ genau dann symmetrisch, wenn $\mathrm{M}_B^B(f)$ bzgl. einer bel. Orthonormalbasis B von V eine symmetrische Matrix ist.
16) **Spektralsatz**: V sei n-dim. eukl. VR, f symmetrisch: Dann ex. eine Orthonormalbasis B von V mit $\mathrm{M}_B^B(f) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ ($\lambda_i \in \mathbf{R}\, \forall i = 1, \ldots, n$)
17) Eine symm. Matrix $M \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ besitzt n reele Eigenwerte und ist diagonalisierbar.

§21 Unitäre Vektorräume

1) V sei ein $\mathbf{C}$-VR. Eine Abb. $h : V \times V \longrightarrow \mathbf{C}$ heißt **Hermite'sche Form** auf V, wenn gilt: H ist $\mathbf{C}$-linear im ersten Argument und $h(v, w) = \overline{h(w, v)}\, \forall v, w \in V$.
Eine Hermite'sche Form h auf V heißt **positiv definit**, wenn gilt: $h(v, v) > 0 \forall v \in V, v \neq 0_V$.
Ein Skalarprodukt s auf V ist eine positiv definite Hermite'sche Form auf V. (V, s) heißt dann ein **unitärer C-VR**.
Beispiel: Das **kanonische Skalarprodukt**