Zusammenfassung Analysis II

1. Funktionenfolgen

Gleichmäßige Konvergenz von Folgen von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}$

1) **Definition:** gleichmäßige Konvergenz
2) **Satz:** Seien $f_n : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig, $n \in \mathbb{N}$. Konvergiert $f_n \to f$ gleichmäßig auf D, dann ist f auf D stetig.
3) **Satz:** Seien $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ int'bar, $n \in \mathbb{N}$. Konvergiert $f_n \to f$ gleichmäßig auf $[a, b]$, dann ist f int'bar und $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$.
4) **Satz:** Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Seien $f_n : I \to \mathbb{R}$ stetig diff'bar, $n \in \mathbb{N}$. Gilt mit $f,\ g : I \to \mathbb{R}$:
   $f_n \to f$ pktw. auf I und
   $f_n' \to g$ glm. auf I,
   dann ist f stetig diff'bar und $f' = g$.
5) **Satz:** Seien $f_n : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.
   $f_n \to (f : D \to \mathbb{C})$ glm. $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall x \in D,\ n, m \geq N : |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$
6) **Satz:** (Weierstraß'scher „M-Test“)
   Sei (M_n) Folge mit $M_n > 0$ und $\sum_n M_n < \infty$ und $|f_n(X)| \leq M_n\ \forall x \in D$. $\Rightarrow \sum_n f_n$ glm. konvergent auf D.

2. Potenz- und Taylor-Reihen

Grenzfunktionen $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$.

1) **Hilfssatz:** Konvergiert eine Potenzreihe an einer Stelle $y \in \mathbb{C},\ y \neq 0$, so konvergiert sie absolut für jedes $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < |y|$.
2) **Definition:** Konvergenzradius
3) **Satz:** Sei $\sum_n a_n(x-x_0)^n$ eine Konv'reihe mit Konv'radius R. Dann divergiert sie für x mit $|x-x_0| > R$. Für $|x-x_0| < R$ konvergiert sie. Damit konvergiert sie glm. auf jeder Kreisscheibe um den Punkt x_0 mit Radius $< R$.
4) **Satz:** (Cauchy-Hadamard)
   $\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.
5) **Satz:** (Euler'sche Formel für den Konv'radius)
   Existiert der uneigentliche Grenzwert $q = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$, dann gilt $R = \frac{1}{q}$.
6) Grenzfunktionen sind stetig auf dem Konv'kreis ihrer Potenzreihe.

7-8) Die Grenzfunktion einer Potenzreihe mit Konv'radius $R > 0$ ist im Konv'intervall beliebig oft diff'bar. Die Konv'radien der differenzierten Reihen sind ebenfalls R.

9) **Definition:** Taylor-Reihe einer beliebig oft diff'baren Funktion $f : I \to \mathbb{C},\ I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall.

3. Der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$

1) **Satz:** Normeigenschaften: positiv definit, linear, Dreiecksungleichung gilt
2) **Definition:** Konvergenz im $\mathbb{R}^n$
3) **Satz:** Kompontentenweise Konvergenz
4) **Satz:** (von Bolzano-Weierstraß)
   Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}^n$ besitzt eine konvergent Teilfolge
5) **Definition:** Offene Kugel
6) **Definition:** Umgebung
7) **Satz:** Eine Folge im $\mathbb{R}^n$ konvergiert genau dann gegen einen Punkt, wenn jede seiner Umgebungen fast alle Folgenglieder enthält (also nur eine endliche Menge von Folgengliedern nicht in der Umgebung liegt).
8) Offene Teilmengen: Sind Umgebung für jeden ihrer Punkte

4. Normierte Vektorräume

1) **Definition:** Norm, normierte VRe
2) **Definition:** offene Kugel, Einheitskugel
3) **Definition:** Konvergenz einer Folge $(x_k) \subset V,\ V$ Vektorraum.

5-7) **Satz:** Auf endlichdim. VRen sind je zwei Normen zueinander äquivalent

Beispiele für Normen:
Zeilensummennorm im $R^{n\times n}$ (bzw. im $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$): $\|A\|_Z = \max_{1,\dots,n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$
Operatornorm im $L(X, Y)$: $\sup\{\|f(x)\|_Y \mid x \in X, \|x\|_X \leq 1\}$

5. Metrische Räume

2) **Definition:** Metrik, Eigenschaften: positiv definit, Symmetrie, Dreiecksungleichung; metrischer Raum
3) **Definition:** offene Kugel im metrischen Raum, Umgebung
4) **Definition:** innerer Punkt, äußerer Punkt, Randpunkt, $\mathring{A} :=$ Inneres von A, $\partial A :=$ Rand von A.

5) Offene Teilmenge, Abgeschlossene Teilmengen (Komplement ist offen)

6-7) **Satz:** Endliche Vereinigungen und beliebige Durchschnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

8) **Folgerung:** Das Innere $\mathring{A}$ einer Teilmenge $A \subset X$ ist offen.

9) **Definition:** Eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum mit Metrik d heißt konvergent mit Grenzwert a, wenn $\lim_{k\to\infty} d(x_k) = a$. Der Grenzwert ist eindeutig bestimmt.

10) **Hilfssatz:** Eine konvergente Folge, deren Glieder allesamt in einer abgeschlossenen Menge enthalten sind, hat auch ihren Grenzwert in dieser Menge.

11) **Satz:** (Folgenkriterium für Abgeschlossenheit)
A abgeschlossen $\Leftrightarrow \forall (x_k) \subset A$, (x_k) konvergent: $\lim_{k\to\infty} x_k \in A$.

12) **Definition:** Abschluss (= abgeschlossene Hülle): Sei $A \subset X$. $\bar{A} := X \setminus (X \setminus A)^\circ$

13) **Satz:** $\bar{A} = A \cup \partial A$

14) **Satz:** Der Rand einer Teilmenge eines metrischen Raumes ist abgeschlossen.

6. Stetige Abbildungen

1) **Definition:** Seien (X, d_X), (Y, d_Y) metr. Räume. Sei $f : X \to Y$ eine Abb. f heißt steig in einem Punkt $a \in X \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in X,\ d_X(x,a) < \delta : d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon$.

2) **Satz:** Verkettungen von stetigen Funktionen sind stetig

3) **Satz:** (Folgenkriterium für Stetigkeit)
f stetig in $a \Leftrightarrow (x_k \to a$ für $k \to \infty \Rightarrow f(x_k) \to f(a)$ für $k \to \infty)$

4) **Folgerung:** Sei $f : X \to \mathbb{R}^n$ eine Abb. f stetig in einem Punkt $a \in X \Leftrightarrow$ Die Komponentenfunktionen von f sind stetig.

5) **Folgerung:** Seien $f,\ g : X \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann sind $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ stetige Funktionen $X \to \mathbb{R}$. Ist $g(x) \neq 0 \forall x \in X$, dann ist auch $\frac{1}{g} : X \to \mathbb{R}$ stetig. Ferner sind $|f|, \max(f,g)$ und $\min(f,g)$ stetig.

6) **Hilfssatz:** Seien $(V, \|\cdot\|_V)$, $(\|W, \|\cdot\|_W)$ normierte VRe. V sei endlich-dimensional. Sei $f : V \to W$ eine lin. Abb. Dann ex. ein $c > 0$, so dass gilt:
$\|f(x)\|_W \leq c \cdot \|x\|_V \ \forall x \in V$.

7) **Hilfssatz:** Aus der Lipschitz-Bedingung:
$\exists L > 0 : \forall x,\ x_0 \in X : d_y(f(x), f(x_0)) \leq L \cdot d_X(x, x_0)$
folgt Stetigkeit.

8) **Satz:** Lin. Abb. zweischen endlich-dim. Vektorräumen sind stetig.

9) **Satz:** Sei $f : X \to Y$ Abb. f stetig $\Leftrightarrow \forall B \subset Y$, B offene Teilmenge: $f^{-1}(B)$ ist offen.

10) **Folgerung:** $\hookrightarrow$ Satz aus 9) für abgeschlossene Mengen.

7. Kompaktheit

1) **Definition:** Sei (X, d) metrischer Raum. $K \subset X$ kompakt $\Leftrightarrow \forall (x_k) \subset K : \exists$ konvergente Teilfolge: $\lim_{j\to\infty} x_{k_j} \in K$.

2) **Hilfssatz:** Kompakte Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind beschränkt. Sie besitzen ein größtes und kleinstes Element.

3) **Satz:** Sei $f : X \to V$ eine stetige Abb. Dann ist das Bild jeder kompakten Teilmenge von X auch kompakt.

4) **Folgerung:** Sei $f : X \to \mathbb{R}$ stetig und $K \subset X$ kompakt. Dann existieren $\max f(K)$ und $\min f(K)$.

5) **Satz:** Sei $K \subset X$ eine kompakte Teilmenge eines metr. Raumes X. Dann ist K eine abgeschlossene Menge. Abgeschlossene Teilmengen von K sind kompakt.

6) **Definition:** Beschränkte Teilmenge eines normierten VRes ($\|x\| \leq M \forall x$)

7) **Satz:** Kompakte Teilmengen eines normierten VRes sind abgeschlossen und beschränkt

8-9) **Satz:** Eine Teilmenge eines endlich-dim. normierten VRes ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

8. Vollständigkeit

1) **Definition:** (X, d) sei metrischer Raum. Cauchy-Folge $(X_k) \subset X$: $\forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall k, i \in \mathbb{N}, k, i > N : d(x_k, x_i) < \epsilon$

2) **Hilfssatz:** Konvergente Folgen sind Cauchy-Folgen

3) **Definition:** Ein metrischer Raum heißt vollständig, wenn in ihm jede Cauchy-Folge konvergiert. (Bsp.: $\mathbb{R}$ ist vollständig, $\mathbb{Q}$ nicht)

4) **Satz:** Kompakte metrische Räume sind vollständig.

5) **Satz:** Endlisch-dim. normierte VRe sind vollständig.

6) **Satz:** Sei $A \in \mathbb{R}^n$ mit $\|A\|_Z < 1$. Dann existiert $(I-A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$.
7) **Hilfssatz:** Für $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt: $\|AB\|_Z \leq \|A\|_Z \cdot \|B\|_Z$.
8) **Satz:** (Majorantenkriterium) Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein vollst. normierter VR. Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ in V konvergiert, falls $\sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\| < \infty$.

9. Partielle Ableitungen

1) **Definition:** Partielle Diff'barkeit
2) **Satz:** An Extremstellen einer Funktion $U \to \mathbb{R}^n$ sind die partiellen Ableitungen 0.
3) **Definition:** Gradient als Zeilenvektor der partiellen Ableitungen (sofern sie existieren)

10. Differenzierbare Funktionen

1) **Definition:** Häufungspunkt: Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. a HP von $A \Leftrightarrow a \in \overline{A \setminus \{a\}}$
2) **Definition:** Sei $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt differenzierbar in a, wenn es eine lin. Abb. $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gibt derart, dass: $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)-L(x-a)}{\|x-a\|} = 0$.
$\mathrm{d}f_a := L$ heißt Differenzial oder Ableitung von f bei a.
3) **Hilfssatz:** Die Ableitung ist (falls sie existiert) eindeutig bestimmt.
4) Die partiellen Ableitungen sind die Komponenten eines „Kandidaten" für die „richtige" Ableitung.
5) **Hilfssatz:** Sei $f : U \to \mathbb{R}$ diff'bar in $a \in U$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $v \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $g :]-\delta, \delta[\to \mathbb{R}$, $g(t) = f(a + tv)$ für ein $\delta > 0$ definiert, diff'bar in 0 mit $g'(0) = f'(a)v (= \mathrm{d}f_a(v))$.
6) **Satz:** Diff'barkeit impliziert Stetigkeit
7) Existieren zu einer Funktion $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die partiellen Ableitungen und sind diese stetig, so ist f diff'bar.
Tangentialebene: $T_a(f) = \{(x_1, \ldots, x_n, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid y = f(a) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \cdot (x_j - a_j)\}$
8) Die Richtungsableitung $\partial_v f(a)$ einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $\nabla f(a) \neq 0$, $\|v\|_2 = 1$ ist am größten, wenn $v = \lambda \nabla f(a)$ mit $\lambda > 0$.

11. Höhere partielle Ableitungen / Taylorformel

1) **Satz:** über Vertauschbarkeit der Diff'reihenfolge
2) **Definition:** Eine $k - mal$ stetig diff'bare Funktion (in einer Umgebung U, für $k \in \mathbb{N}$ heißt C^k-Funktion. $C^k(U)$ bezeichnet den Vektorraum aller C^k-Funktionen auf U.
3) **Definition:** Für $a, b \in \mathbb{R}$ heißt die Teilmenge $[a, b] := \{\lambda + (1-\lambda)a \mid 0 \leq \lambda \leq 1\} \subset \mathbb{R}^n$ die Strecke zwischen a und b.
Definition von konvex, sternförmig
4) **Satz:** Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig bzgl. U. Sei $f \in C^1$. Es gilt:
$\forall x \in U : \exists \zeta \in [a, x] : f(x) - f(a) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(\zeta)(x_j - a_j) = \langle \nabla f(\zeta), x - a \rangle$
6) **Definition:** Laundau'sche O-Notation
8) **Definition:** Hesse-Matrix (symmetrisch nach 11.1 $\Rightarrow$ diagonalisierbar)
9) **Satz:** Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^2(U)$. Sei $a \in U$ mit $\nabla f(a) = 0$ und $H_f(a)$ positiv definit. Dann liegt in a ein striktes lokales Minimum vor, d. h. es gibt eine Umgebung um a, deren Funktionswerte alle größer sind als $f(a)$.

5,7,10) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $m+1$-mal stetig diff'bar in einer Umgebund von $a \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt die allg. Taylorformel:

$$f(x) = \sum_{\substack{a \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| \leq m}} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(a)(x-a)^\alpha + O(\|x-a\|^{m+1}) \text{ für x} \to \text{a.}$$

12. Ableitungen von Abbildungen

1) **Definition:** Sei $U \subset X$ offen, $f : U \to Y$ eine Abbildung. f heißt diff'bar in einem Punkt $a \in U$, wenn es eine lin. Abb. $L \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ gibt mit:
$\|f(a+h) - f(a) - L(h)\|_Y = o(\|h\|_X)$ für $x \to 0$.
$\mathrm{d}f(a) := L$ heißt das Differenzial von f in a. Eindeutigkeit wie in 10.3 zu zeigen.
2) Diff'barkeit impliziert Stetigkeit
3) $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit Komponentenfunktionen $f_1, \ldots, f_m$. Es gilt: f diff'bar in $a \in U \Leftrightarrow f_1, \ldots, f_m$ diff'bar in $a \in U$.
Das Differenzial $\mathrm{d}f(a)$ hat folgende Darstellungsmatrix:
$$\begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \ldots & \partial_n f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m & \ldots & \partial_n f_m \end{pmatrix}$$
4) **Definition:** Die Matrix aus 12.3 heißt Jacobi-Matrix oder Ableitung von f in a.

5) **Satz:** (Linearität der Ableitung)
Seien $f, g : U \to Y$ diff'bar in $a \in U$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt: $\mathrm{d}(\alpha f + \beta g)(a) = \alpha \mathrm{d}f(a) + \beta \mathrm{d}g(a)$.
6) **Satz:** (Kettenregel)
Kurz (unter entsprechenden Voraussetzungen): $\mathrm{d}(f \circ g)(a) = \mathrm{d}f(g(a)) \circ \mathrm{d}g(a)$.
7) **Satz:** (Produktregel)
$\mathrm{d}(f \cdot g)(a) = f(a) \cdot \mathrm{d}g(a) + g(a) \cdot \mathrm{d}f(a)$.

13. Der Schrankensatz

Der Mittelwertsatz gilt nicht mehr für diff'bare Abbildungen. Wichtig ist oft folgende Konsequenz des MWSs:
$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$ mit $M = \sup_{x \in [a,b]} |f'(x) < \infty$ (wenn f beschränkt)

1) **Satz:** $L(X, Y) := \mathrm{Hom}(X, Y)$ bilden einen normierten VR mit der Norm: $\|f\|_{L(X,Y)} := \sup\{\|f(x)\|_Y \mid x \in X, \|x\|_X \leq 1\}$.
2) **Definition:** Die Norm aus (13.1) heißt Operatornorm.
3) **Satz:** (Schrankensatz)
Sei $U \subset X$ offen, $f : U \to Y$ eine C^1-Abb., $x_1, x_2 \in U$ mit $[x_1, x_2] \subset U$. Dann gilt:
$\|f(x_2) - f(x_1)\|_Y \leq M\|x_2 - x_1\|_X$, wobei $M := \sup_{x \in [x_1,x_2]} \|\mathrm{d}f(x)\|_{L(X,Y)} < \infty$.
4) **Hilfssatz:** (Spezialfall $X = \mathbb{R}$) Sei $\delta > 0, g :]-\delta, 1 + \delta[\to Y$ stetig diff'bar. Dann gilt: $\|g(1) - g(0)\|_Y \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \|\mathrm{d}g(t)\|_{L(\mathbb{R},Y)}$.
5) **Folgerung:** Sei $U \subset X$ offen, $K \subset U$ kompakt und konvex, $f : U \to Y$ stetig diff'bar. Dann ist f Lipschitz-stetig, d.h. $\|f(x_2) - f(x_1)\|_Y \leq M\|x_2 - x_1\|_X \; \forall x_1, x_2 \in K$.

14. Implizite Funktionen

Motivation: Gesucht sind die Nullstellen einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, d. h. $f(x, y) = 0$. Die Nullstellenmenge $N_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$ hat i. A. eine komplizierte Gestalt. Problem: Wie bestimmt man nun bspw. $\min_{(x,y) \in N_f} \phi(x, y)$ für $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$?

1) **Satz:** (Spezialfall)
Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ stetig diff'bar, $(x_0, y_0) \in U$ mit $f(x_0, y_0) = 0$ und $\partial_y f(x_0, y_0) \neq 0$. Dann existieren $0 < \delta \leq r$ und eine C^1-Funktion $g :]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\to]y_0 - r, y_0 + r[$, so dass gilt:
$W :=]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\times]y_0 - r, y_0 + r[\subset U$ und $\forall (x, y) \in W : (f(x, y) = 0 \leftrightarrow y = g(x))$.
2) **Satz:** (von impliziten Funktionen)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ offen, $(x_0, y_0) \in U$, $f : U \to \mathbb{R}^m$, $(x, y) \to f(x, y)$ stetig diff'bar in U mit $f(x_0, y_0) = 0$. Die $m \times m$-Matrix $\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_i}(x_0, y_0)\right)_{i,j=1,\ldots,m}$ sei invertierbar. Dann existieren offene Umgebungen $V \subset \mathbb{R}^n$ und $W \subset \mathbb{R}^m$ von x_0 bzw. von y und eine C^1-Abb. $g : V \to W$ derart, dass gilt: $\forall (x, y) \in V \times W : (f(x, y) = 0 \leftrightarrow y = g(x))$.
3) **Definition:** Diffeomoprhismus
4) **Satz:** (Umkehrsatz)
Sei $\phi : X \to Y$ eine C^1-Abb., $U \subset X$ offen. Für einen Punkt $a \in U$ gelte: $\mathrm{d}\phi(a) \in L(X, Y)$ ist invertierbar. Dann ex. eine offene Umgebung $U_0 \subset U$ von a, so dass $V = \phi(U_0)$ offen ist und ϕ ein Diffeomorphismus von U_0 auf V ist.
5) **Satz:** (Banach'scher Fixpunktsatz)
Sei (X, d) metr. Raum, $\phi : X \to X$ eine Abb., für die es eine Zahl $0 < \alpha < 1$ gibt, so dass gilt: $d(\phi(x), \phi(y)) \leq \alpha \cdot d(x, y) \; \forall x, y \in X$.
Dann ex. genau ein $x \in X$ mit $x = \phi(x)$.

15. Extrema unter Nebenbedingungen

1) **Satz:** (Lagrange'sche Multiplikatorregel)
Es sei h diff'bar und $f = (f_1, \ldots, f_m)$ stetig diff'bar auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$. Zu jedem Punkt x der Nullstellenmenge $N = \{x \in U \mid f(x) = 0\}$ habe die Matrix $f'(x)$ den Rang m. Dann gilt: Ist $a \in N$ eine Maximumstelle für h auf N, dann ex. reelle Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ mit:
$h'(a) + \lambda_1 f_1'(a) + \ldots + \lambda_m f_m'(a) = 0$
2) **Hilfssatz:** Sei $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ mit $f'(a)v = 0$. Dann ex. eine C^1-Abb.:
$\gamma : K :=]-\delta, \delta[\to \mathbb{R}^n$ mit $\gamma(K) \subset N$ und $\gamma(0) = a$, $\gamma'(0) = v$.
(γ ist eine in N verlaufende Kurve mit Tangentenrichtung v in $a = \gamma(0)$.)
3) **Hilfssatz:** Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ derart, dass für $v \in \mathbb{R}^n$ gilt: $(Av = 0 \Rightarrow bv = 0$. Dann ist b eine Linearkombination der Zeilen von A.